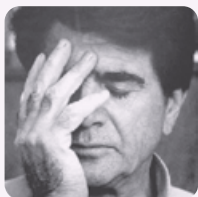


مقدمه



محمدرضا شجریان (۱ مهر ۱۳۱۹ - ۱۷ مهر ۱۳۹۹)
موسیقی‌دان و خواننده موسیقی سنتی ایرانی بود.
شجریان با عنوان «خسرو آواز ایران» شناخته می‌شود.

بالآخره تمام شد! بعد از دو سال زحمت، آخرین کلمه از تألیف این کتاب رو در آخرای یه شب تابستانی گرم نوشتم و حس عجیبی رو تجربه کردم! از یه طرف خوشحال بودم از این‌که موفق شدم کاری رو به اتمام برسونم و از طرف دیگه سخت دلتنگش بودم و یه حس غریبی از این‌که دیگه با این کتاب برای مدتی کاری ندارم، وجودم رو فرا گرفت. به همین خاطر صاف رفتم سمت تلفن همراهم و دیدم چیزی به جز صدای استاد محمدرضا شجریان نمی‌تونه مناسب حال و هوام باشه ... هندزفری رو گذاشتم و آواز مورد علاقه‌ام رو پلی کردم ...

«مفلسانیم و هوای می و مطرب داریم آه اگر خرقه پشمین به گرو نستانند ...»

بعد هم زمان رفتم به سراغ دیدن فصل‌های مختلف کتاب و همین‌طور شروع کردم به ورق‌زدن و خوندن درس‌نامه‌ها، تست‌ها، پاسخ‌ها و از خودم سؤال می‌کردم که: شد اون چیزی که می‌خواستی؟ و ارزشش رو داشت دو سال تلاش؟ فکر کردم به تمام دو سالی که شبانه‌روز رفتیم و اومدیم، نشستیم و نوشتیم، دیدیم نشد، پاک کردیم و دوباره نوشتیم، بحث کردیم و دعوا مان شد، ولی از کیفیتی که می‌خواستیم کوتاه نیامدیم و ...

ته دلم حس کردم راضی‌ام و ارزشش رو داشت، پس با خیال راحت آخرین فایل کتاب رو ارسال کردم و منم با صدا تکرار کردم ...

... ما همه بنده و این قوم خداوندانند ...

بدون شک این کتاب به چاپ نمی‌رسید مگر با همکاری تیم بزرگی که از ما حمایت کردند؛ به همین خاطر تشکر می‌کنیم از: دکتر امید نصری و دکتر کمیل نصری مدیران محترم انتشارات خیلی‌سبز که به ما اعتماد کردند و تألیف این کتاب را به ما سپردند. دکتر کورش اسلامی که فصل به فصل به ما مشورت دادند و پدرا نه در کنار ما ایستادند. خانم سولماز احمدی که دقت نظر ویژه، تلاش‌ها و پیگیری‌های ایشان کتاب را به چاپ رساند. دوست خوبمان آقای سهیل سمائی و تیم سخت‌کوششان که در تولید پی‌دی‌اف کتاب از هیچ چیزی کم نگذاشتند. قلباً معتقدیم که کتاب فعلی خالی از اشکال و ایراد نیست. به همین خاطر از اساتید گرامی و خوانندگان کتاب دعوت می‌کنیم با ارسال ایرادات و نظرات به [mohamadiriazi](https://www.instagram.com/mohamadiriazi)  به بهبود سطح کیفیت کتاب و رفع ایرادات احتمالی کمک کنند.

با آرزوی سلامتی و موفقیت

برای تمامی معلمان و دانش‌آموزان ایران

فهرست

۷	 مجموعه‌ها	فصل اول
۵۳	 عددهای حقیقی	فصل دوم
۹۰	 استدلال و اثبات در هندسه	فصل سوم
۱۳۸	 توان و ریشه	فصل چهارم
۱۷۶	 عبارت‌های جبری	فصل پنجم
۲۱۸	 خط و معادله‌های خطی	فصل ششم
۲۶۳	 عبارت‌های گویا	فصل هفتم
۲۸۵	 حجم و مساحت	فصل هشتم

۱. ۲ می‌دانیم اعضای مجموعه باید به طور دقیق مشخص باشند.

Q بررسی گزینه‌ها: ۱ ۱۰ عدد گویای کوچک‌تر از ۱۰ مشخص

نیستند؛ پس یک مجموعه را معین نمی‌کند. ۲ می‌دانیم مضرب‌های

صحیح عدد ۷ که کوچک‌تر از ۱۰۰۰ باشند، اعداد زیر هستند:

۹۹۴، ۹۸۷، ۹۸۰، ۹۷۳، ...، ۲۱، ۱۴، ۷، ۰، -۷، -۱۴، -۲۱، -۲۸، ...

پس دقیقاً می‌دانیم به دنبال چه اعدادی هستیم؛ بنابراین این گزینه یک

مجموعه را مشخص می‌کند. ۳ چهار عدد فرد طبیعی معین نیستند.

۴ شمارنده‌های ۸، اعداد ۱، ۲، ۴ و ۸ هستند؛ پس سه شمارنده

طبیعی ۸ مشخص نیستند.

۲. ۴ شمارنده‌های اول ۱۲ عبارت‌اند از ۲، ۳ و ۵، پس دو شمارنده اول

۱۲ مشخص نیست و عبارت داده‌شده یک مجموعه را نمایش نمی‌دهد.

Q بررسی سایر گزینه‌ها: ۱ مضرب‌های طبیعی عدد ۱۱ نشان‌دهنده

مجموعه زیر است: $\{11, 22, 33, \dots\}$

۲ بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از صفر، عدد -۱ است: $\{-1\}$

۳ عدد ۱۲۳ مقسوم‌علیه زوج ندارد؛ پس عبارت داده‌شده مجموعه تهی

را نشان می‌دهد: $\{\}$

۳. ۳ می‌دانیم مربع هر عدد طبیعی به غیر از یک، از خودش بزرگ‌تر

است و خود یک نیز با مربعش برابر است، پس این گزینه مجموعه تهی

را نمایش می‌دهد.

Q بررسی سایر گزینه‌ها: ۱ $\{\}$ ۲ $\{0\}$ ۳ $\{23\}$ ۴ $\{a, b, c\}$

۴. ۴ چون $A = \{a, b, c\}$ ، پس اعضای A عبارت‌اند

از: $\{a, b, c\}$

در نتیجه عبارت $b \in A$ از بین گزینه‌ها درست است.

۵. ۴ مجموعه $A = \{\{\}, \{1, 2\}\}$ دارای یک عضو $\{\}, \{1, 2\}$

است که همان مجموعه B است؛ پس می‌توان گفت: $B \in A$

۶. ۴ با توجه به این که $A = \{2, \{2\}, \{2, 2\}\}$ ، با حذف

عضوهای تکراری داریم:

$A = \{2, \{2\}, \{2, 2\}\} = \{2, \{2\}, \{2, 2\}\} = \{2, \{2\}\}$

پس اعضای A عبارت‌اند از: $2, \{2\}$

در نتیجه تعداد اعضای A برابر ۲ است و فقط **۴** درست است.

۷. ۱ اعضای مجموعه $A = \{\emptyset, \{0\}, \{\emptyset, \{0\}\}\}$ عبارت‌اند از:

$\emptyset, \{0\}, \{\emptyset, \{0\}\}$

Q بررسی موارد:

$\{0\} \in A$: نادرست است، زیرا $\{0\}$ در عضوهای A وجود ندارد.

$\{0\} \notin A$: درست است، زیرا عضو $\{0\}$ در A وجود ندارد.

$\{\emptyset\} \in A$: نادرست است، زیرا $\{\emptyset\}$ در بین عضوهای A وجود ندارد.

$\emptyset \in A$: نادرست است، زیرا $\emptyset$ در بین عضوهای A وجود ندارد.

۲. ۲ **Q بررسی گزینه‌ها:**

۱ اگر $x = 2$ باشد، داریم: $x = 2 \Rightarrow \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5} \notin \mathbb{Z}$

پس برای همه xها، حاصل عضو $\mathbb{Z}$ نیست.

۲ اگر $x = 0$ باشد، داریم: $x = 0 \Rightarrow \sqrt{0^2 + 1} = \sqrt{1} = 1 \in \mathbb{Z}$

پس برای برخی xها، حاصل عضو $\mathbb{Z}$ است.

۳ اگر $x = 0$ باشد، داریم: $x = 0 \Rightarrow \sqrt{0^2 + 1} = \sqrt{1} = 1 \in \mathbb{Q}$

پس مقداری وجود دارد که حاصل، عضو $\mathbb{Q}$ باشد.

۴ اگر $x = 1$ باشد، داریم: $x = 1 \Rightarrow \sqrt{1^2 + 1} = \sqrt{2} \notin \mathbb{N}$

پس حاصل به ازای تمام مقادیر x، عضو $\mathbb{N}$ نیست.

۹. ۲ یا $\delta \in M \Rightarrow a = \delta \Rightarrow M = \{5, 6, 3, 8\}$ ✓

یا $a + 1 = \delta \Rightarrow a = 4 \Rightarrow M = \{4, 5, 2, 7\}$ ✗

یا $a - 2 = \delta \Rightarrow a = 7 \Rightarrow M = \{7, 8, 5, 10\}$ ✗

یا $a + 3 = \delta \Rightarrow a = 2 \Rightarrow M = \{2, 3, 0, 5\}$ ✓

چون ۷ عضو M نیست، $a = 4$ و $a = 7$ غیر قابل قبول‌اند، پس a تنها

می‌تواند مقادیر ۵ و ۲ را اختیار کند.

۱۰. ۱ با توجه به این که $1 \in A$ است و دو برابر هر عضو A نیز در آن وجود

دارد، پس اعداد $2, 4, 8, 16, \dots$ در A حضور دارند. از طرفی ۲ واحد کم‌تر

از هر عضوی نیز در A وجود دارد؛ پس $0, 2, 6, 14, \dots$ و دو برابر آن‌ها و دو

واحد کم‌تر از آن‌ها نیز عضو A هستند و با ادامه این روند می‌توان نتیجه گرفت

تمام اعداد زوج و مثبت در A وجود دارند؛ پس **۲** حذف می‌شود. هم‌چنین

اگر ۲ واحد از ۱ کم کنیم، به عدد -۱ می‌رسیم که با استدلال مشابه اعداد

$-2, -4, -8, -16, \dots$ و دو واحد کم‌تر از آن‌ها هم عضو A خواهند بود و با ادامه

این روند می‌توان نتیجه گرفت تمام اعداد زوج منفی نیز عضو A هستند. در

نتیجه **۳** هم حذف می‌شود. در ادامه کافی است -۱ را در نظر بگیریم که اگر

۲ واحد از آن کم کنیم، به -۳ می‌رسیم و در نتیجه با کم کردن ۲ واحد دیگر،

اعداد $-5, -7, -9, -11, \dots$ را نیز خواهیم داشت. می‌توان گفت تمامی اعداد فرد

منفی عضو A هستند؛ پس **۴** هم حذف می‌شود.

۱۱. ۳ کوچک‌ترین حاصل جمع ۴ عدد از مجموعه A برابر

$27 + 23 + 19 + 15 = 84$ یعنی ۸۴ و بزرگ‌ترین حاصل جمع چهار عدد برابر

$39 + 35 + 31 + 27 = 132$ یعنی ۱۳۲ است.

از آن‌جا که فاصله عضوهای متوالی مجموعه A برابر ۴ است، پس فاصله

مجموع هر ۴ عضو آن نیز ۴ است؛ یعنی مجموع‌های مختلف به ترتیب

$84, 88, 92, \dots$ و ۱۳۲ است که تعداد آن‌ها برابر است با:

$\frac{132 - 84}{4} + 1 = \frac{48}{4} + 1 = 13$

۱۲. ۲ جفت اعدادی که حاصل تفاضل آن‌ها برابر ۱۰ است، عبارت‌اند از:

$(1, 11), (2, 12), (3, 13), (4, 14), \dots, (11, 21), (12, 22), \dots,$

$(19, 29), (20, 30)$

برای حذف حداقل عضوها باید از هر جفت یک عضو را حذف کرد. با توجه

به تکراری بودن بعضی عضوها در این ۲۰ جفت، کافی است اعداد ۱۱، ۱۲، ۱۳،

۱۴، ... و ۲۰ حذف شوند که تعداد آن‌ها ۱۰ تا است.

۱۳. ۳ چون x، عضو مجموعه اعداد طبیعی است، پس برای

مشخص کردن اعضای A کافی است در $2x - 7$ به جای x، اعداد طبیعی

را قرار دهیم:

$x = 1 \Rightarrow 2 \times 1 - 7 = 2 - 7 = -5$

$x = 2 \Rightarrow 2 \times 2 - 7 = 4 - 7 = -3$

$x = 3 \Rightarrow 2 \times 3 - 7 = 6 - 7 = -1$

پس A برابر است با: $A = \{-5, -3, -1, \dots\}$

در نهایت مقادیر x یا همان عضوهای مجموعه B عبارتند از:

$$B = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

۲۱. مجموعه داده شده در هر گزینه را با اعضای آن مشخص می کنیم:

۱ $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3 \leq x < 12\} = \{1, 2, 3\}$

۲ $B = \{3x \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x < 4\} = \{3, 6, 9\}$

۳ $B = \{3x \mid x \in \mathbb{N}, 3 \leq x \leq 12\} = \{9, 12, 15, \dots, 36\}$

۴ $B = \{3x \mid x \in \mathbb{N}, 0 < x \leq 4\} = \{3, 6, 9, 12\}$

۲۲. مجموعه داده شده در هر گزینه را با اعضای آن نمایش می دهیم:

۱ $x \in \mathbb{Q}$ است؛ پس اعضای مجموعه A را نمی توانیم بشماریم؛ بنابراین نمی توان A را با اعضایش نمایش داد.

۲ $x \in \mathbb{Z}$ است؛ پس داریم:

$$A = \{\frac{x}{2} \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -\frac{2}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \dots\}$$

$$= \{\dots, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \dots\}$$

۳ $x \in \mathbb{N}$ است؛ پس به جای x ، اعداد طبیعی را قرار می دهیم:

$$A = \{\frac{x-1}{2} \mid x \in \mathbb{N}\} = \{\frac{1-1}{2}, \frac{2-1}{2}, \frac{3-1}{2}, \frac{4-1}{2}, \dots\}$$

$$= \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}$$

۴ $x \in \mathbb{W}$ است؛ پس به جای x ، اعداد $0, 1, 2, \dots$ را قرار می دهیم:

$$A = \{\frac{x+1}{2} \mid x \in \mathbb{W}\} = \{\frac{0+1}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{2+1}{2}, \frac{3+1}{2}, \dots\}$$

$$= \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\}$$

۲۳. ۱ در $x \in \mathbb{R}$ ، پس تعداد اعضای مجموعه بی شمار است

و نمی توان آن را با اعضا نمایش داد. همچنین در $x \in \mathbb{Z}$ و

$x \leq 5$ ، پس بی شمار عدد می توان به جای x قرار داد و تعداد اعضای این

مجموعه بی شمار است، در صورتی که مجموعه مورد بحث تنها ۵ عضو دارد.

🔍 بررسی سایر گزینه ها:

۱ $A = \{x^2 + 2 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$

$$= \{1^2 + 2, 2^2 + 2, 3^2 + 2, 4^2 + 2, 5^2 + 2\} = \{3, 6, 11, 18, 27\}$$

۳ $A = \{x^2 + 2 \mid x \in \mathbb{Z}, -5 \leq x \leq 5\}$

$$= \{(-5)^2 + 2, (-4)^2 + 2, (-3)^2 + 2, (-2)^2 + 2, (-1)^2 + 2, 0^2 + 2, 1^2 + 2, 2^2 + 2, 3^2 + 2, 4^2 + 2, 5^2 + 2\}$$

$$= \{2, 3, 6, 11, 18, 27\}$$

۲۴. ۳ با کمی دقت در اعضای مجموعه B مشخص است که صورت

کسرها، اعداد طبیعی و مخرج کسرها، به شکل $(+1 \text{ عدد صورت})$

هستند؛ پس ۱ و ۲ حذف می شوند. از طرفی در $\frac{x}{x^2}$ عبارت

پس از ساده شدن برابر $\frac{1}{x}$ است، پس این گزینه نیز نادرست است.

نمایش مجموعه ۳ با اعضا برابر است با:

$$\{\frac{x-1}{x^2} \mid x \in \mathbb{N}, x \geq 2\} = \{\frac{2-1}{2^2}, \frac{3-1}{3^2}, \frac{4-1}{4^2}, \dots\}$$

$$= \{\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \dots\}$$

۱۴. ۱ ابتدا محدوده داده شده را ساده می کنیم:

$$-3 < x + 2 < 4 \xrightarrow{-2} -5 < x < 2$$

چون $x \in \mathbb{Z}$ است، پس مجموعه B برابر است با:

$$B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$$

۱۵. ۳ چون $a = 3b$ و $b \neq 0$ پس درباره $\frac{a}{b}$ داریم: $\frac{a}{b} = \frac{3b}{b} = 3$

در نتیجه مجموعه B دارای یک عضو است:

$$B = \{3\}$$

۱۶. ۳ به جای x می توان اعداد طبیعی کمتر از 60 قرار داد. اما چون

به دنبال اعضای طبیعی هستیم، پس باید x هایی را انتخاب کنیم که

حاصل $\frac{\sqrt{x}}{2}$ هم طبیعی باشد. به همین خاطر x باید مربع کامل باشد و

حاصل $\sqrt{x}$ هم زوج باشد.

اعداد مربع کامل کمتر از 60 عبارتند از: $1, 4, 9, 16, 25, 36$ و 49 که

از بین آن ها فقط $4, 16$ و 36 زوج هستند و در نتیجه:

$$\frac{\sqrt{x}}{2} \xrightarrow{x=4} \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{\sqrt{x}}{2} \xrightarrow{x=16} \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{\sqrt{x}}{2} \xrightarrow{x=36} \frac{\sqrt{36}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

پس مجموعه داده شده سه عضو طبیعی دارد.

۱۷. ۲ اعداد طبیعی که در محدوده $4 \leq \sqrt{x} \leq 7$ قرار می گیرند،

عبارتند از: $16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \dots$

حالا به سراغ $\frac{12x}{x^2}$ می رویم که ساده شده آن با فرض $x \neq 0$ برابر $\frac{12}{x}$ است.

از طرفی چون به دنبال اعضای غیرصحيح A هستیم، پس کافی است به جای

x در $\frac{12}{x}$ اعدادی را قرار دهیم که مقسوم علیه 12 نباشند؛ یعنی $1, 2, 3, 4, 6, 12$ را کنار می گذاریم و 10 عدد باقی مانده به جای x قرار می گیرند.

۱۸. ۴ با توجه به $2 < x < 10$ و $\frac{x}{2} \in \mathbb{N}$ ، مقدار x می تواند اعداد زوج

بین 2 تا 10 باشد، پس مقادیر x عبارتند از:

$$4, 6, 8$$

اعضای A برابر x^2 هستند، پس A برابر است با: $A = \{16, 36, 64\}$

۱۹. ۱ x یک عدد صحيح است؛ در نتیجه $x - 3$ نیز صحيح است. از

طرفی $(x - 3)^2$ با مربع کامل هایی برابر است که بین 10 و 100 قرار دارند.

$$(x - 3)^2 = 16, 25, 36, 49, 64, 81$$

$$\Rightarrow x - 3 = \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 8, \pm 9$$

$$\Rightarrow x = 7, -1, 8, -2, 9, -3, 10, -4, 11, -5, 12, -6$$

x های به دست آمده، همان اعضای مجموعه A هستند و حاصل جمع آن ها

برابر 36 است.

۲۰. ۲ $(x + 1) \in \mathbb{Z}$ زمانی اتفاق می افتد که $x \in \mathbb{Z}$ باشد، زیرا:

$$-(x + 1) \in \mathbb{Z} \Rightarrow -x - 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow -x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

حالا به سراغ $(x + 2)^2 < 25$ می رویم. چون $x + 2$ نیز صحيح است،

مقادیر ممکن برای $(x + 2)^2$ عبارتند از:

$$(x + 2)^2 = 0, 1, 4, 9, 16 \Rightarrow x + 2 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$$

از طرفی امیر تا لحظه رسیدن به هم $\frac{2}{5}$ مسیر را در مدت ۱۲ دقیقه طی کرده، پس امیر هر $\frac{1}{5}$ مسیر را در ۶ دقیقه طی می‌کند و در نتیجه فاصله بین دو شهر را در مدت زمان $5 \times 6 = 30$ دقیقه پیموده است.

۵۸۰. ۱ عملیات تعریف شده را برای چند عدد می‌نویسیم تا الگوی بین آن‌ها را پیدا کنیم.

$$a=1, b=\frac{1}{5} \Rightarrow 1+\frac{1}{5}+1 \times \frac{1}{5}=1+1=2$$

$$a=2, b=\frac{1}{5} \Rightarrow 2+\frac{1}{5}+2 \times \frac{1}{5}=2+1=3$$

$$a=3, b=\frac{1}{5} \Rightarrow 3+\frac{1}{5}+3 \times \frac{1}{5}=3+1=4$$

پس با همین ترتیب در مرحله آخر به عدد ۹۹ و $\frac{1}{100}$ می‌رسیم که برابر است با:

$$a=99, b=\frac{1}{100} \Rightarrow 99+\frac{1}{100}+99 \times \frac{1}{100}=99+1=100$$

۵۸۱. ۴

نکته: می‌دانیم اعداد اعشاری مختوم و متناوب، گویا هستند.

بررسی گزینه‌ها:

۱ بعد از ممیز تکرار می‌شود، پس عدد داده شده $1/\bar{3}$ بوده و اعشاری متناوب است.

۲ بعد از ممیز تکرار می‌شود، پس عدد داده شده برابر $321/\bar{0}$ بوده و در نتیجه اعشاری متناوب است.

۳ بعد از ممیز تکرار می‌شود، پس عدد داده شده برابر $24/\bar{0}$ بوده و در نتیجه اعشاری متناوب است.

۴ عدد داده شده گنگ است.

۵۸۲. ۳ مجموعه A نشان‌دهنده اعداد گنگ از -۲ تا ۳ است.

بررسی گزینه‌ها:

۱ $-2 \in A$ ✗

-۲ عدد گنگ نیست؛ بنابراین عضو مجموعه A نخواهد بود.

۲ $0 \in A$ ✗

صفر عدد گنگ نیست؛ پس عضو مجموعه A نخواهد بود.

۳ $\sqrt{8} \in A$ ✓

$\sqrt{8}$ عددی گنگ برابر $2\sqrt{2}$ است که چون $\sqrt{2} \approx 1/4$ ، پس $2\sqrt{2}$ تقریباً برابر $2/8$ و در محدوده $2 \leq x \leq 3$ قرار دارد؛ پس عضو A است.

۴ $\sqrt{12} \in A$ ✗

$\sqrt{12}$ عددی گنگ و برابر $2\sqrt{3}$ است که چون $\sqrt{3} \approx 1/7$ ، پس $2\sqrt{3}$ تقریباً برابر $3/4$ است و خارج محدوده $2 \leq x \leq 3$ قرار دارد؛ بنابراین عضو A نیست.

۵۸۳. ۳ با بررسی هر کدام از گزینه‌ها و ساده کردن اعداد در صورت امکان، تعداد اعداد گنگ هر کدام را مشخص می‌کنیم.

بررسی گزینه‌ها:

۱ $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{4} = 2 \in \mathbb{Q}, \sqrt{\pi^2} = \pi \in \mathbb{Q}', (-\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$

$4/3353335... \in \mathbb{Q}' \Rightarrow$ تعداد اعداد گنگ = ۲

۲ $\sqrt{1/44} = 1/2 \in \mathbb{Q}, \sqrt{\pi} \in \mathbb{Q}', 3\sqrt{3} \in \mathbb{Q}'$

$9/33... = 9/3 \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ تعداد اعداد گنگ = ۲

۵۷۶. ۳ وقتی ۹۰٪ گنجایش بطری پر باشد یعنی ۱۰٪ آن خالی شده است. ۱۰٪ بطری الیتری برابر است با: $\frac{1}{10} \times 1L = \frac{1}{10}L$ از طرفی مقدار به دست آمده برابر ۹۰٪ گنجایش لیوان است، پس اگر گنجایش لیوان x باشد، داریم:

$$\frac{90}{100} \times x = \frac{1}{10} \Rightarrow x = \frac{1}{10} \times \frac{100}{90} = \frac{1}{9} \approx 0/11L$$

۵۷۷. ۳ روش ۱ ابتدا $\frac{1}{5}$ آب موجود در منبع مصرف می‌شود؛ پس $\frac{4}{5}$ آب باقی می‌ماند. در مرحله بعد $\frac{1}{5}$ از $\frac{4}{5}$ آب باقی‌مانده از مخزن خارج و در نتیجه $\frac{4}{5}$ از $\frac{4}{5}$ آب اولیه مخزن باقی می‌ماند، در نتیجه آب باقی‌مانده از کل برابر است با:

$$\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$$

همان‌طور که گفته شده این مقدار $\frac{1}{5}$ گنجایش منبع است؛ پس کسری از منبع که پرآب بوده برابر است با:

$$\frac{1}{5} \div \frac{16}{25} = \frac{1}{5} \times \frac{25}{16} = \frac{5}{16}$$

روش ۲ ابتدا $\frac{1}{5}$ آب موجود در منبع مصرف شده، بعد از آن $\frac{1}{5}$ آب باقی‌مانده یعنی $(1-\frac{1}{5})$ یا همان $\frac{4}{5}$ از $\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$ از آب باقی‌مانده نیز

خارج می‌شود؛ پس در کل $\frac{1}{5} + \frac{4}{25} = \frac{9}{25}$ از آب موجود در مخزن کم

شده است، یعنی $1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$ از حجم آب اولیه در مخزن باقی مانده

است. اگر گنجایش منبع را x در نظر بگیریم و میزان آب اولیه را w، طبق

$$\frac{16}{25}w = \frac{1}{5}x \Rightarrow w = \frac{1}{5}x \times \frac{25}{16}$$

فرض سؤال داریم:

سؤال از ما نسبت آب اولیه به گنجایش مخزن یا همان $\frac{w}{x}$ را می‌خواهد، پس داریم:

$$\frac{w}{x} = \frac{\frac{1}{5}x \times \frac{25}{16}}{x} = \frac{5}{16}$$

۵۷۸. ۲ چون مغازه اول در سه روز نخست به ترتیب $\frac{1}{47}, \frac{1}{7}$ و $\frac{1}{3}$ کتاب‌ها را فروخته است؛ پس حتماً تعداد کتاب‌های این مغازه بر ۴۷، ۷ و

۲ بخش‌پذیر است، بنابراین مضرب ک.م.م آن‌ها یعنی $2 \times 7 \times 47 = 658$

است. به همین ترتیب تعداد کتاب‌های مغازه دوم بر ۵، ۴۱ و ۳ بخش‌پذیر

است؛ پس مضرب ک.م.م آن‌ها یعنی $3 \times 5 \times 41 = 615$ است و همین‌طور

تعداد کتاب‌های مغازه سوم مضرب $100 = 5 \times 2 \times 10$ است.

درباره تعداد کتاب‌های مغازه اول در بین گزینه‌ها فقط ۲ و ۴ مضرب

۶۵۸ هستند که اگر تعداد کتاب‌های مغازه اول برابر ۱۳۱۶ یعنی ۴ باشد،

تعداد کل کتاب‌ها از ۱۹۸۸ بیشتر می‌شود؛ پس ۲ درست است.

۵۷۹. ۳ با توجه به این‌که در لحظه رسیدن به هم، علی $\frac{1}{5}$ راه را

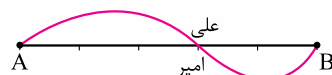
بیشتر طی کرده بود؛ پس در لحظه رسیدن به هم، علی $\frac{3}{5}$ و امیر $\frac{2}{5}$ راه

را طی کرده بودند.

با توجه به شکل، فاصله علی تا شهر B برابر $\frac{2}{5}$ مسیر است که در ۸ دقیقه

طی کرده است؛ پس علی هر $\frac{1}{5}$ از مسیر را در ۴ دقیقه طی می‌کند و تا

لحظه رسیدن به امیر که $\frac{3}{5}$ مسیر را طی کرده، مدت زمان $3 \times 4 = 12$ دقیقه صرف شده است.



۵۸۷. ۴ بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ قطر مربعی به ضلع a برابر $a\sqrt{2}$ است، پس:

$$\frac{\text{قطر}}{\text{ضلع}} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

۲ ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر است با:

$$\Rightarrow AH^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$$

$$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\text{ضلع}}{\text{ارتفاع}} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$$

۳ مساحت و محیط مربعی به ضلع a به ترتیب برابر a^2 و $4a$ است،

$$\frac{\text{مساحت}}{\text{محیط}} = \frac{a^2}{4a} = \frac{a}{4}$$

پس:

اگر a گویا باشد، گویاست و اگر گنگ باشد، گنگ است، اما ۱ و ۲ همواره گنگ هستند.

۵۸۸. ۴ بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ اگر $x = \frac{1}{\pi^2}$ و $y = \frac{1}{\pi}$ باشد، داریم:

$$\pi x + y = \pi\left(\frac{1}{\pi^2}\right) - \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} = 0 \in \mathbb{Q}$$

۲ اگر $x = \sqrt{5} + 3$ و $y = 7 + \sqrt{5}$ باشد، داریم:

$$x - y = \sqrt{5} + 3 - (7 + \sqrt{5}) = \sqrt{5} + 3 - 7 - \sqrt{5} = -4 \in \mathbb{Q}$$

۳ اگر $x = \sqrt{2}$ و $y = \sqrt{8}$ باشد، داریم:

$$xy = \sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \in \mathbb{Q}$$

پس هیچ کدام از گزینه‌ها همواره گنگ نیست و در نتیجه ۴ درست است.

۵۸۹. ۳ نشان دهنده مجموعه اعداد گویا و $\mathbb{Q}'$ نشان دهنده مجموعه اعداد گنگ است. چون $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}'$ با هم اشتراک ندارند؛ پس $\mathbb{Q} - \mathbb{Q}'$ برابر $\mathbb{Q}$ است و در نتیجه زیرمجموعه تهی نیست.

بررسی سایر گزینه‌ها:

$$1 \quad \mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{\dots, -4, -3, -2, -1\} \subseteq \mathbb{Z} - \mathbb{N}$$

$$= \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0\}$$

$$2 \quad \mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\} \subseteq \mathbb{Z}$$

$$4 \quad \mathbb{Z} - \mathbb{Q} = \emptyset \subseteq \emptyset$$

۵۹۰. ۱ بین دو عدد گنگ، بی‌نهایت عدد گویا و عدد گنگ وجود دارد.

۵۹۱. ۲ $\sqrt{2}$ عددی گنگ و صفر عددی گویاست که حاصل ضرب آن‌ها برابر صفر است که عددی گویا می‌باشد.

۵۹۲. ۱ بررسی عبارت‌ها:

الف عدد اعشاری $\frac{2}{3}$ غیرمختوم است ولی می‌توان آن را به صورت

یک عدد گویا نمایش داد؛ پس گنگ نیست. ✗

ب دو عدد گنگ $1 - \sqrt{5}$ و $7 - \sqrt{5}$ مثبت هستند ولی حاصل جمع

آن‌ها برابر ۶ است که گنگ نیست. ✓

پ اگر $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ را $\sqrt{2}$ و $\sqrt{8}$ در نظر بگیریم، مساحت مستطیل

برابر $\sqrt{16}$ یعنی ۴ است که گویاست. ✗

پس فقط یک عبارت درست است.

$$3 \quad \sqrt{0/1} \in \mathbb{Q}', \frac{\pi^2}{2} \in \mathbb{Q}', \sqrt{2} + 2 \in \mathbb{Q}', 4/0.0054 \in \mathbb{Q}$$

$\Rightarrow$ تعداد اعداد گنگ = ۳

$$4 \quad \sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6 \in \mathbb{Q}, \pi \in \mathbb{Q}', 2/\sqrt{356} \in \mathbb{Q}$$

$\Rightarrow$ تعداد اعداد گنگ = ۲
همان‌طور که مشخص است تعداد اعداد گنگ در ۳ از بقیه گزینه‌ها بیشتر است.

۵۸۴. ۲ هر یک از گزینه‌ها را تا حد امکان ساده می‌کنیم.

$$1 \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4/5}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \in \mathbb{Q}$$

$$2 \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7/5}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{15}{7}} \notin \mathbb{Q}$$

$$3 \quad (\sqrt{4/5} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{4/5} - \sqrt{2})(\sqrt{4/5} - \sqrt{2})$$

$$= (\sqrt{4/5})^2 - \sqrt{2} \times \sqrt{4/5} - \sqrt{2} \times \sqrt{4/5} + (\sqrt{2})^2$$

$$= 4/5 - 2 \times \sqrt{8/5} + 2 = 4/5 - 6 + 2 = 0/5 \in \mathbb{Q}$$

(البته می‌توانستیم عبارت را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای به توان ۲

برسانیم که در فصل ۵ با آن آشنا خواهید شد.)

$$4 \quad (\sqrt{4/5} + \sqrt{2})(\sqrt{4/5} - \sqrt{2})$$

$$= (\sqrt{4/5})^2 - \sqrt{2} \times \sqrt{4/5} + \sqrt{2} \times \sqrt{4/5} - (\sqrt{2})^2$$

$$= 4/5 - 2 = -2/5 \in \mathbb{Q}$$

(البته عبارت این گزینه را می‌توانستیم به کمک اتحاد مزدوج ساده کنیم.)

۵۸۵. ۱ بررسی عبارت‌ها:

الف عدد اعشاری مختوم است؛ پس گویاست.

ب ارتفاع وارد بر وتر به کمک مساحت به دست می‌آید که چون اضلاع گویا هستند؛ پس مقدار مساحت و در نتیجه ارتفاع نیز گویاست.

$$\frac{\text{مساحت}}{\text{وتر}} = \frac{2 \times \text{ارتفاع}}{2} \Rightarrow \text{ارتفاع} = \frac{\text{مساحت}}{\text{وتر}}$$

پ قطر مربع به ضلع a برابر $a\sqrt{2}$ است، پس اگر ضلع مربع گویا باشد، قطر آن حتماً عددی گنگ است.

ت چون توان پرانترها یکسان است، پس پایه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

برای ضرب کردن پایه‌ها می‌توانیم از اتحاد مزدوج کمک بگیریم. (ولی ما به صورت معمولی پرانترها را در هم ضرب می‌کنیم.)

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1396} (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1396} = ((\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}))^{1396}$$

$$= ((\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} \times \sqrt{2} - \sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2)^{1396}$$

$$= (3 - 2)^{1396} = 1^{1396} = 1 \in \mathbb{Q}$$

۵۸۶. ۳ مثال نقض سایر گزینه‌ها به صورت زیر است:

۱ دو عدد گنگ مثبت را $7 - \sqrt{2}$ و $5 + \sqrt{2}$ در نظر می‌گیریم.

$$7 - \sqrt{2} + 5 + \sqrt{2} = 12 \in \mathbb{Q}$$

۲ دو عدد گنگ را $\sqrt{2}$ در نظر می‌گیریم. $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2 \in \mathbb{Q}$

۴ عدد گنگ را $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ در نظر می‌گیریم و توان دوم آن برابر است

$$\text{با: } (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

$$= (\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} \times \sqrt{3} + \sqrt{2} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3$$

$$= 5 + 2\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$$

۹۳۸. ۴ با توجه به این که مطابق شکل مثلث ABC متساوی الساقین

است، داریم:

$$AB = AC \Rightarrow \hat{A}BC = \hat{B}CA = \frac{180^\circ - 52^\circ}{2} = 64^\circ$$

از تساوی این دو زاویه می توان نتیجه گرفت زاویه های خارجی B و C نیز با یکدیگر برابرند، پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B}CD = \hat{E}BA \\ BE = BC \text{ طبق شکل} \\ AB = CD \text{ طبق شکل} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض.ض.}} \triangle ABE \cong \triangle BCD$$

با نوشتن تساوی اجزای متناظر داریم:

$$\hat{A}BC = \hat{A}CB = \frac{180^\circ - 52^\circ}{2} = 64^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{E} = \hat{D}BC \\ \hat{D} = \hat{E}AB \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{E} + \hat{D} = \hat{E} + \hat{E}AB \quad \text{زاویه خارجی} \quad \hat{A}BC = 64^\circ$$

۹۳۹. ۴ با توجه به اطلاعات مسئله می دانیم دو مثلث ABD و

DCE هم نهشت اند، پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABD \cong \triangle DCE \\ \text{تساوی اجزای متناظر} \end{array} \right\} \rightarrow AB = CE = 11$$

AB و CE روبه رو به زاویه های EDC و BDA هستند که چون متقابل به رأس هستند، برابرند.

از طرفی می دانیم مثلث ABC متساوی الساقین است، پس:

$$AB = BC = 11$$

از آن جایی که نقطه D وسط پاره خط BC است حتماً طول BD برابر با ۵/۵ خواهد بود.

۹۴۰. ۲ لازم است نشان دهیم سه مثلث ABP، OBP و OFP با

یکدیگر هم نهشت اند. برای این منظور داریم:

$$\left. \begin{array}{l} OP = OP \text{ وتر مشترک} \\ \hat{F} = \hat{B} = 90^\circ \text{ شعاع و خط مماس} \\ OF = OB \text{ شعاع دایره} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وض.}} \triangle OFP \cong \triangle OBP$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} \left\{ \begin{array}{l} \hat{O}PF = \hat{B}PO (***) \\ \hat{F}OP = \hat{B}OP (*) \end{array} \right.$$

با توجه به شکل داریم:

$$\hat{F}OP + \hat{F}OP + \hat{B}OP = 180^\circ \xrightarrow{(*)} \hat{F}OP = \hat{B}OP = 70^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{مثلث OFP و (***)}} \hat{O}PF = \hat{B}PO = 90^\circ - 70^\circ$$

حال به سراغ هم نهشتی دو مثلث ABP و OBP می رویم:

$$\left. \begin{array}{l} BP = BP \text{ ضلع مشترک} \\ \hat{B}PO = \hat{P}BA \text{ شعاع و خط مماس} \\ OB = AB \text{ طبق فرض} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض.ض.}} \triangle ABP \cong \triangle BPO$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} \hat{B}PO = \hat{A}PB = 20^\circ$$

بنابراین زاویه APF برابر با $20^\circ + 20^\circ + 20^\circ = 60^\circ$ و ۲ صحیح است.

۹۴۱. ۳ ابتدا با توجه به اطلاعات مسئله

شکل مورد نظر را رسم می کنیم. چون دوزنقه

ABCD متساوی الساقین است این شکل

محور تقارن دارد و می توان نتیجه گرفت:

$$AE = EB, DE = EC$$

توجه کنید بدون استفاده از تقارن و به کمک هم نهشتی مثلث ها نیز

می توان تساوی های بالا را نشان داد. حال در مثلث های قائم الزویه ABE و DCE داریم:

$$\triangle ABE: AE^2 + BE^2 = AB^2 \Rightarrow 2AE^2 = 4 \Rightarrow AE = \sqrt{2}$$

$$\triangle DCE: DE^2 + EC^2 = DC^2 \Rightarrow 2DE^2 = 16 \Rightarrow DE = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow DE = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

این بار رابطه فیثاغورس را در مثلث ADE می نویسیم:

$$AE^2 + DE^2 = AD^2 \Rightarrow 2 + 8 = 10 \Rightarrow AD = \sqrt{10} = 10$$

۹۴۲. ۳ مثلث های متساوی الاضلاع ANB و DMC با ضلع ۶ و به

حالت تساوی سه ضلع هم نهشت هستند. از طرفی چون در مثلث

متساوی الاضلاع ارتفاع و میانه بر هم منطبق هستند، پس:

$$HB = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

با استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث HBN داریم:

$$BH^2 + NH^2 = BN^2 \Rightarrow 3^2 + NH^2 = 6^2$$

$$\Rightarrow NH^2 = 36 - 9 \Rightarrow NH^2 = 27 \Rightarrow NH = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

ارتفاع دو مثلث با هم برابر است؛ پس:

$$HH' = HH' = 3\sqrt{3}$$

$$HH' = HN + H'M - MN \Rightarrow 6 = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - MN$$

$$\Rightarrow MN = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 6 \Rightarrow MN = 6\sqrt{3} - 6$$

۹۴۳. ۴ با توجه به شکل از مرکز دایره به نقاط

M و D وصل می کنیم. می دانیم زاویه M

حتماً قائمه است و ضلع BC را نصف می کند، زیرا

قطر MH را رسم می کنیم، چون BC دایره مماس است، داریم:

$$\hat{M} = 90^\circ \xrightarrow{\text{مربع ABCD}} \hat{H} = 90^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} AO = OD \\ \text{OH مشترک} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وض.}} \triangle AOH \cong \triangle HOD \Rightarrow AH = HD$$

یا:

AD وتری از دایره است؛ پس عمود MH (که از مرکز می گذرد) آن را

نصف می کند. $\Rightarrow BM = MC$

$$AH = BM = CM = 4$$

پس داریم:

$$OA = OD = OM = r$$

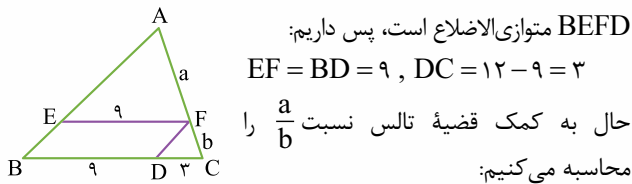
$$OH = 8 - r$$

هم چنین می توان نتیجه گرفت:

$$OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow r^2 = (8 - r)^2 + 16$$

$$\Rightarrow r^2 = 64 + r^2 - 16r + 16 \Rightarrow 80 - 16r = 0 \Rightarrow r = \frac{80}{16} = 5$$

۹۴۸. ۲ با توجه به ترازهای بیان شده در صورت سؤال حتماً چهارضلعی



BEFD متوازی الاضلاع است، پس داریم:

$$EF = BD = 9, DC = 12 - 9 = 3$$

حال به کمک قضیه تالس نسبت $\frac{a}{b}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$DF \parallel AB \Rightarrow \frac{CF}{AF} = \frac{DC}{BD} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = 3$$

۹۴۹. ۳ با توجه به این که در صورت سؤال ذکر شده $MN \parallel BC$ می‌توانیم از قضیه تالس در مثلث ABC کمک بگیریم.

می‌توانیم از قضیه تالس در مثلث ABC کمک بگیریم.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{6}{6+a} = \frac{4}{9} \Rightarrow 54 = 24 + 4a$$

$$\Rightarrow 4a = 30 \Rightarrow a = 7.5$$

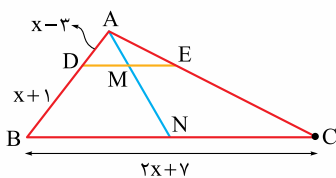
$$\frac{AN}{CN} = \frac{AM}{MB} \Rightarrow \frac{b}{6} = \frac{6}{7.5} \Rightarrow b = \frac{36}{7.5} = 4.8$$

حال با داشتن مقادیر a و b مقادیر a + b را محاسبه می‌کنیم.

$$a + b = 7.5 + 4.8 = 12.3$$

۹۵۰. ۱ با توجه به تراز دو پاره خط DE و BC می‌توانیم از قضیه

تالس در مثلث ABC استفاده کنیم، پس داریم: (DE = x)



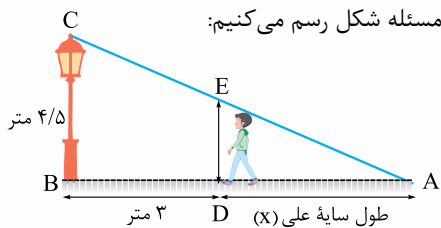
$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{x-3}{x-3+x+1} = \frac{x}{2x+7}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (x-3)(2x+7) = x(2x-2)$$

$$\Rightarrow 2x^2 + x - 21 = 2x^2 - 2x \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = 7$$

از آنجایی که طول پاره خط DE برابر با ۷ است و M وسط DE قرار دارد حتماً $DM = 3.5$.

۹۵۱. ۱ ابتدا برای مسئله شکل رسم می‌کنیم:



با توجه به این که علی و چراغ روشنایی هر دو عمودی هستند، می‌توانیم

از قضیه تالس در مثلث ABC استفاده کنیم.

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{x}{x+3} = \frac{1/8}{4/5} = \frac{2}{5}$$

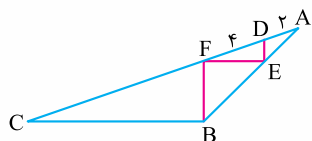
$$\Rightarrow 5x = 2x + 6 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین طول سایه علی ۲ متر و ۱ صحیح است.

۹۵۲. ۱ با توجه به تراز خطوط

مورد نظر در شکل می‌توانیم از قضیه

تالس در مثلث‌های ABC و ABF استفاده کنیم:



۹۴۴. ۴ می‌دانیم شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است،

پس شعاع OH و OH' به ترتیب بر ضلع AC و AB از مثلث و شعاع

OH' بر ضلع BC از مثلث متساوی‌الاضلاع عمود است.

از طرفی:

$$\left. \begin{array}{l} OH = OH' = \text{شعاع} \\ AO \text{ مشترک} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وضی}} \triangle AOH \cong \triangle AOH'$$

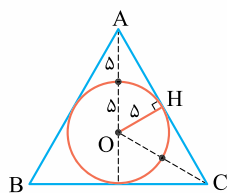
$$\Rightarrow \angle OAH = \angle OAH' \Rightarrow \text{AO نیمساز زاویه A است.}$$

$$\angle OAH = 30^\circ$$

و در نتیجه:

حال در مثلث قائم‌الزاویه OAH داریم:

$$OA^2 = 5^2 + AH^2$$



$$\xrightarrow{\begin{array}{l} \hat{A} = 30^\circ \\ OA = 2OH = 10 \end{array}} 10^2 = 5^2 + AH^2 \Rightarrow AH = \sqrt{75}$$

تا این‌جا نشان دادیم OA نیمساز است، به همین ترتیب می‌توان نشان

داد که OC نیز نیمساز است، اما در مثلث متساوی‌الاضلاع نیمساز، میانه

و ارتفاع منطبق هستند؛ پس OA و OC ارتفاع نیز هستند، از طرفی

می‌دانیم ارتفاع‌ها همرسند؛ پس وقتی از نقطه O (محل تقاطع ارتفاع‌های

OA و OC) به ضلع AC عمود رسم کنیم، حتماً ارتفاع و در نتیجه

میانه خواهد بود؛ پس $AC = 2AH = 2\sqrt{75}$.

و در نهایت محیط مثلث قابل محاسبه است:

$$P_{\triangle ABC} = 3AC = 6\sqrt{75} = 6\sqrt{3 \times 25} = 30\sqrt{3}$$

۹۴۵. ۲ با توجه به خطوط موازی و قضیه تالس نسبت‌های مساوی را

می‌نویسیم، سپس مقدار X و Y را محاسبه می‌کنیم؛ پس داریم:

$$\frac{2}{x+1} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3 \times (x+1) = 8 \Rightarrow 3x + 3 = 8$$

$$\Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$\frac{x-1}{y} = \frac{3}{4} \xrightarrow{x=\frac{5}{3}} \frac{\frac{5}{3}-1}{y} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{2/3}{y} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3y = \frac{8}{3} \Rightarrow y = \frac{8}{9}$$

۹۴۶. ۲ با توجه به این که $DE \parallel BC$ است، می‌توانیم از رابطه تالس

در مثلث ABC استفاده کنیم؛ پس داریم:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{x-3}{1+x} = \frac{x}{x+7}$$

به کمک طرفین وسطین و تشکیل معادله

درجه ۲ مقدار X را محاسبه می‌کنیم:

$$(x-3)(x+7) = x(x+1) \Rightarrow x^2 + 4x - 21 = x^2 + x$$

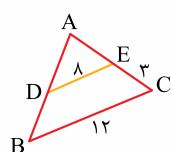
$$\Rightarrow 3x - 21 = 0 \Rightarrow x = 7$$

۹۴۷. ۴ با توجه به این که $DE \parallel BC$

است، می‌توانیم از قضیه تالس در مثلث

ABC استفاده کنیم:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



$$\frac{AE}{AE+3} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3AE = 2AE + 6 \Rightarrow AE = 6$$

۱۳۹۱. ۴ با توجه به این که فرجهٔ رادیکال‌ها برابر است، داریم:

$$A = \sqrt{\frac{28}{18}} \times \frac{\sqrt{125} \times \sqrt{32}}{\sqrt{35 \times 27}} \div \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{28}{18} \times \frac{125 \times 32}{35 \times 27} \times \frac{3}{36}} = \sqrt{\frac{20^2}{27^2}} = \frac{20}{27}$$

پس معکوس حاصل برابر $\frac{27}{20}$ است.

$$\left(\frac{28}{18} \times \frac{125}{35} \times \frac{32}{27} \times \frac{3}{36} \right) = \frac{4 \times 5}{3 \times 9} \times \frac{5 \times 5}{27} = \frac{20}{27} \times \frac{5}{27} = \frac{20^2}{27^2}$$

۱۳۹۲. ۱ ابتدا داخل پرانتز را ساده کرده و سپس حاصل عبارت را به

دست می‌آوریم.

$$\frac{(a^{\sqrt{2}} \times a^{\sqrt{12}})^2}{a^{\sqrt{18}}} = \frac{(a^{\sqrt{2}} \times a^{2\sqrt{3}})^2}{a^{3\sqrt{2}}} = \frac{(a^{\sqrt{2}+2\sqrt{3}})^2}{a^{3\sqrt{2}}} = \frac{a^{2\sqrt{2}+4\sqrt{3}}}{a^{3\sqrt{2}}} = a^{2\sqrt{2}+4\sqrt{3}-3\sqrt{2}} = a^{4\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

۱۳۹۳. ۳ رادیکال‌ها را به صورت توان کسری می‌نویسیم و داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{(a+1)^2 \times (-2^2)}}{\sqrt[3]{8(a+1)^{-1} \times \sqrt{a+1}}} &= \frac{(a+1)^{\frac{2}{3}} \times (-4)}{2 \times (a+1)^{-\frac{1}{3}} \times (a+1)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{-2 \times (a+1)^{\frac{2}{3}}}{(a+1)^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}} = \frac{-2 \times (a+1)^{\frac{2}{3}}}{(a+1)^{\frac{1}{6}}} = -2 \times (a+1)^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} \\ &= -2 \times (a+1)^{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{a+1} \end{aligned}$$

۱۳۹۴. ۳

نکته: اگر عددی با توان منفی در مخرج کسر باشد با قرینه‌کردن توان آن،

می‌توان عدد را به صورت کسر انتقال داد و برعکس.

پرانتهای با توان منفی را منتقل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{27(x-2)^2} \times \sqrt{(x-2)^{-1}}}{\sqrt[3]{(x-2)^{-1} \times (-3)^2}} &= \frac{\sqrt[3]{27(x-2)^2} \times \sqrt[3]{(x-2)}}{\sqrt{(x-2) \times (-9)}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{27(x-2)^3}}{\sqrt{(x-2) \times (-9)}} = \frac{\sqrt[3]{(x-2)^3}}{\sqrt{(x-2) \times (-9)}} = \frac{x-2}{-3\sqrt{x-2}} \end{aligned}$$

با گویا کردن کسر به دست آمده داریم:

$$\frac{x-2}{-3\sqrt{x-2}} \times \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} = \frac{(x-2) \times \sqrt{x-2}}{-3(x-2)} = \frac{-\sqrt{x-2}}{3}$$

۱۳۹۵. ۳ رادیکال ۸ را به صورت 2^3 نوشته و سپس توان را با فرجه

ساده می‌کنیم. $\sqrt{8} \times \sqrt[3]{8} = \sqrt{8} \times \sqrt[3]{2^3} = \sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$

۱۳۹۶. ۴ روش ابتدا باید فرجه‌ها را یکسان کنیم، برای این کار فرجه

و توان رادیکال اول را در ۴ و فرجه و توان رادیکال دوم را در ۳ ضرب می‌کنیم.

$$\sqrt[4]{4} \times \sqrt[3]{8} = \sqrt[12]{4^3} \times \sqrt[12]{8^4} = \sqrt[12]{2^9} \times \sqrt[12]{2^{16}} = \sqrt[12]{2^{25}} = \sqrt[12]{2^{12} \times 2^5} = 2\sqrt[12]{2^5}$$

در بین ۱ و ۳ که مثبت هستند می‌دانیم هر چه اعداد متوالی بزرگ‌تر شوند، اختلاف جذرهای آن‌ها کم‌تر می‌شود، پس ۴ کوچک‌ترین عدد مثبت در بین گزینه‌ها است.

۱۳۸۴. ۴ می‌دانیم $\sqrt{5} \approx 2/2$ و $\sqrt{3} \approx 1/7$ است، پس:

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{3} \approx 1/7 \\ y &= \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx \frac{2/2+1}{2} = 1/6 \\ z &= \frac{2(\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{2(2/2-1)}{2} = 1/8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y < x < z$$

۱۳۸۵. ۴ می‌دانیم $(0/5)^4 = 0/0625$ و $(0/5)^3 = 0/125$ است،

$$x = \sqrt{0/25} = \sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{5}{10} = 0/5$$

$$y = \sqrt[3]{0/125} < \sqrt[3]{0/125} \Rightarrow y < 0/5$$

$$z = \sqrt[4]{0/0625} > \sqrt[4]{0/0625} \Rightarrow z > 0/5$$

بنابراین می‌توان گفت:

۱۳۸۶. ۲ بررسی عبارت‌ها:

الف نادرست است، زیرا در زیر رادیکال با فرجهٔ زوج عدد منفی قرار نمی‌گیرد و در نتیجه $\sqrt{-16}$ و $\sqrt{-4}$ عدد حقیقی نیستند و نمی‌توان آن‌ها را در هم ضرب کرد.

ب حاصل عبارت زیر رادیکال برابر ۶۴ است که مثبت هم هست؛ پس این عبارت درست است.

پ حاصل $\sqrt{64}$ برابر ۸ است؛ پس تساوی داده‌شده درست است.

۱۳۸۷. ۱ می‌دانیم می‌توان رادیکال‌های با فرجهٔ یکسان را در هم ضرب یا بر هم تقسیم کرد. (فرجه‌های فرد هم که محدودیت ندارند).

$$\frac{\sqrt[3]{25} \times \sqrt[3]{-2}}{\sqrt[3]{3} \div \sqrt[3]{6}} = \frac{\sqrt[3]{25 \times (-2)}}{\sqrt[3]{\frac{3}{6}}} = \frac{\sqrt[3]{25 \times (-2)}}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{25 \times (-2)} \times 2 = \sqrt[3]{-1000} = -10$$

۱۳۸۸. ۲ در پرانتز اول، رادیکال را برای صورت و مخرج در نظر گرفته

و در پرانتز دوم، عدد پشت رادیکال را به زیر رادیکال می‌بریم.

$$\begin{aligned} \left(\frac{12}{\sqrt[3]{36}} \right)^7 \div (2\sqrt[3]{6})^4 &= \left(\frac{12^7}{\sqrt[3]{36^7}} \right) \div (\sqrt[3]{2^3 \times 6^4})^4 \\ &= (\sqrt[3]{48})^7 \div (\sqrt[3]{48})^4 = (\sqrt[3]{48})^3 = 48 \end{aligned}$$

۱۳۸۹. ۲ در مخرج تقسیم را انجام داده و توان منفی صورت را به

مخرج می‌بریم.

$$\frac{(\sqrt{2})^3 \times 2^{-4}}{(\sqrt{2})^8 \div (\sqrt{2})^3} = \frac{(\sqrt{2})^3}{(\sqrt{2})^5 \times 2^4} = \frac{1}{(\sqrt{2})^2 \times 2^4} = \frac{1}{2 \times 2^4} = \frac{1}{2^5} = 2^{-5}$$

۱۳۹۰. ۴ چون فرجه‌ها یکسان هستند، پس می‌توان عبارت زیر رادیکال‌ها

را در هم ضرب کرد.

$$\begin{aligned} \sqrt{-a^2(x+y)} \times \sqrt[3]{a(x+y)^2} &= \sqrt[6]{-a^2 \times a \times (x+y)(x+y)^2} \\ &= \sqrt[6]{-a^3 \times (x+y)^3} = -a(x+y) \end{aligned}$$

روش ۲ رادیکال‌ها را به صورت توان کسری نوشته و داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{8} &= 4^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{3}} = (2^2)^{\frac{1}{3}} \times (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2+1}{3}} \\ &= 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2 \end{aligned}$$

۱۳۹۷. ۱ ابتدا M و N را ساده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{a^2} \sqrt{a} \sqrt{a^2} = \sqrt{a^2 \times a \times a^2} = \sqrt{a^4 \times a} = \sqrt{a^5} \\ &= \sqrt[5]{a^5} = a \\ N &= a^2 \sqrt{a} \sqrt{a^2} \sqrt{a} = \sqrt[4]{a^2 \times a \times a^2 \times a} = \sqrt[4]{a^5} \\ &\Rightarrow \sqrt[4]{a^4 \times a} = \sqrt[4]{a^4} \times \sqrt[4]{a} = a \times \sqrt[4]{a} \\ &= \sqrt[4]{a^4 \times a} = \sqrt[4]{a^5} \end{aligned}$$

حالا $\frac{M}{N}$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{M}{N} = \frac{\sqrt[5]{a^5}}{\sqrt[4]{a^5}} = \sqrt[5]{a^{5-20}} = \sqrt[5]{a^{-15}} = a^{-\frac{15}{5}} = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

۱۳۹۸. ۲ با تجزیه اعداد زیر رادیکال و ساده کردن آن‌ها داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{20} + 3\sqrt{125} - 2\sqrt{5} - \sqrt{45} \\ = \sqrt{2^2 \times 5} + 3\sqrt{5^2 \times 5} - 2\sqrt{5} - \sqrt{3^2 \times 5} \\ = 2\sqrt{5} + 15\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5} \end{aligned}$$

۱۳۹۹. ۱ با تغییر در اعداد زیر رادیکال داریم:

$$\begin{aligned} 5\sqrt{128} - 3\sqrt{72} + 2\sqrt{200} + 4\sqrt{98} - 4\sqrt{242} \\ = 5\sqrt{64 \times 2} - 3\sqrt{36 \times 2} + 2\sqrt{100 \times 2} + 4\sqrt{49 \times 2} - 4\sqrt{121 \times 2} \\ = 5 \times 8\sqrt{2} - 3 \times 6\sqrt{2} + 2 \times 10\sqrt{2} + 4 \times 7\sqrt{2} - 4 \times 11\sqrt{2} \\ = 40\sqrt{2} - 18\sqrt{2} + 20\sqrt{2} + 28\sqrt{2} - 44\sqrt{2} = 26\sqrt{2} \end{aligned}$$

۱۴۰۰. ۴ ابتدا هر کدام از رادیکال‌ها را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 3\sqrt{75} - 2\sqrt{32} + 8\sqrt{2} - 15\sqrt{3} \\ = 3\sqrt{25 \times 3} - 2\sqrt{16 \times 2} + 8\sqrt{2} - 15\sqrt{3} \\ = 15\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 15\sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$

۱۴۰۱. ۱ ابتدا عبارت داده شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} a + b\sqrt{3} + 3 - \sqrt{27} + \sqrt[3]{27} &= 5 \\ \Rightarrow a + b\sqrt{3} + 3 - \sqrt{3^2 \times 3} + 3 &= 5 \\ \Rightarrow a + b\sqrt{3} + 3 - 3\sqrt{3} + 3 &= 5 \\ \Rightarrow (a+3) + \sqrt{3}(b-3) &= 5 \end{aligned}$$

با توجه به سمت راست تساوی و عدد صحیح بودن ۵، ضریب $\sqrt{3}$ باید برابر صفر باشد؛ پس:

$$\begin{cases} a+3=5 \Rightarrow a=5-3=2 \\ b-3=0 \Rightarrow b=3 \end{cases} \Rightarrow a+b=5$$

۱۴۰۲. ۴ ابتدا به سراغ عبارت داخل پرانتز می‌رویم و با تجزیه اعداد

زیر رادیکال و ساده کردن آن‌ها به رادیکال‌های مشابه می‌رسیم.

$$\begin{aligned} (3\sqrt{12} + \sqrt{27} - 2\sqrt{75}) \div 2\sqrt{3} \\ = (3\sqrt{2^2 \times 3} + \sqrt{3^2 \times 3} - 2\sqrt{5^2 \times 3}) \div 2\sqrt{3} \\ = (6\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 10\sqrt{3}) \div 2\sqrt{3} = -\sqrt{3} \div 2\sqrt{3} \\ = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

۱۴۰۳. ۳ ابتدا به سراغ پرانتز سمت چپ رفته و رادیکال‌ها را ساده

$$\begin{aligned} (\sqrt{48} - \sqrt{108} + \sqrt{12})^2 (\sqrt{2} - 1) \\ = (\sqrt{16 \times 3} - \sqrt{36 \times 3} + \sqrt{4 \times 3})^2 (\sqrt{2} - 1) \\ = (4\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3})^2 (\sqrt{2} - 1) = 0^2 (\sqrt{2} - 1) = 0 \end{aligned}$$

۱۴۰۴. ۱ ابتدا در پرانتز سمت چپ هر کدام از رادیکال‌ها را تا حد

$$\begin{aligned} (\sqrt{180} + \sqrt{120})(\sqrt{30} - \sqrt{20}) \\ = (\sqrt{9 \times 20} + \sqrt{4 \times 30})(\sqrt{30} - \sqrt{20}) \\ = (3\sqrt{20} + 2\sqrt{30})(\sqrt{30} - \sqrt{20}) \end{aligned}$$

حالا هر کدام از اعداد پرانتز اول را در هر کدام از اعداد پرانتز دوم ضرب

می‌کنیم تا حاصل ضرب پرانتزها به دست آید.

$$\begin{aligned} 3\sqrt{20} \times \sqrt{30} - 3\sqrt{20} \times \sqrt{20} + 2\sqrt{30} \times \sqrt{30} - 2\sqrt{30} \times \sqrt{20} \\ = 3\sqrt{600} - 3 \times 20 + 2 \times 30 - 2\sqrt{600} = \sqrt{600} = 10\sqrt{6} \end{aligned}$$

۱۴۰۵. ۱ ابتدا اعداد روی تاس‌ها را ساده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} -\sqrt{18} &= -\sqrt{9 \times 2} = -3\sqrt{2}, \quad \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}, \quad -\sqrt{2} \\ -\sqrt{8} &= -\sqrt{4 \times 2} = -2\sqrt{2}, \quad \sqrt{3}, \quad -\sqrt{12} = -\sqrt{4 \times 3} = -2\sqrt{3} \end{aligned}$$

بررسی گزینه‌ها:

۱ هرگز امکان ندارد. چون ضریب‌های $\sqrt{2}$ روی وجه‌های تاس‌ها یعنی

$-3\sqrt{2}$ ، $-\sqrt{2}$ و $-2\sqrt{2}$ همگی منفی هستند و حاصل جمع آن‌ها

حتماً عددی منفی می‌شود.

۲ اگر یک تاس $2\sqrt{2}$ و دیگری $-\sqrt{2}$ بیاید امکان دارد.

۳ اگر یک تاس $2\sqrt{3}$ و دیگری $\sqrt{3}$ بیاید امکان دارد.

۴ اگر هر دو تاس $-\sqrt{2}$ بیایند، امکان دارد.

۱۴۰۶. ۲ با تجزیه اعداد زیر رادیکال در داخل پرانتز داریم:

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{1024})^3 &= (\sqrt[3]{2^4} - \sqrt[3]{2^{10}})^3 = (\sqrt[3]{2^2 \times 2} - \sqrt[3]{2^9 \times 2})^3 \\ &= (2\sqrt[3]{2} - 2^3\sqrt[3]{2})^3 = (2\sqrt[3]{2} - 8\sqrt[3]{2})^3 = (-6\sqrt[3]{2})^3 \\ &= (-6)^3 \times (\sqrt[3]{2})^3 = (-6)^3 \times 2 \end{aligned}$$

۱۴۰۷. ۲ ابتدا عبارت داخل قدر مطلق‌ها را کمی ساده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} |3\sqrt{2} - \sqrt[3]{27}| + |-3 - \sqrt{18}| &= |3\sqrt{2} - 3| + |-3 - 3\sqrt{2}| \\ &= \underbrace{|3\sqrt{2} - 3|}_{\text{مثبت}} + \underbrace{|-3 - 3\sqrt{2}|}_{\text{منفی}} = 3\sqrt{2} - 3 - (-3 - 3\sqrt{2}) \\ &= 3\sqrt{2} - 3 + 3 + 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2} = 2 \times 3\sqrt{2} = 2\sqrt{9 \times 2} = 2\sqrt{18} \end{aligned}$$

۱۴۰۸. ۲ ابتدا رادیکال‌ها را ساده کرده و سپس حاصل هر پرانتز را به

دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} (13\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{16}) + (2\sqrt{8} - \sqrt{32}) \\ = (13\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{8 \times 2}) + (2\sqrt{4 \times 2} - \sqrt{16 \times 2}) \\ = (13\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{2}) + (4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}) = 3\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

۱۴۰۹. ۱ عبارت را به دو دسته توان زوج‌ها و فردها تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{3} + \sqrt{3^3} + \sqrt{3^5} + \dots + \sqrt{3^{99}} \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{3^2 \times 3} + \sqrt{3^4 \times 3} + \dots + \sqrt{3^{98} \times 3} \\ &= \sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 3^2\sqrt{3} + \dots + 3^{49}\sqrt{3} \\ &= (3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{49})\sqrt{3} \end{aligned}$$

۱۸۳۰. هر یک از نامساوی‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱. $ac - 2c = c(a - 2) \Rightarrow c(a - 2) < 0 \Rightarrow ac - 2c < 0$
پس این نامساوی نادرست است.

چون $c < 0$ و $b + c > 0$ ، پس حتماً $b > 0$ است.

۲. $ab - 2b = b(a - 2) \Rightarrow b(a - 2) > 0 \Rightarrow ab - 2b > 0$
پس این نامساوی درست است.

۳. $a - 2 + b \Rightarrow a - 2 + b > 0$

چون حاصل جمع دو عدد مثبت همواره عددی مثبت است، پس این نامساوی نیز درست است.

۱۸۳۱. **بررسی عبارت‌ها:**

الف اگر $x = 2$ و $y = -3$: $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{y} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$
این عبارت نادرست است.

ب اگر $x = 3$ و $y = -5$: $\frac{x}{y} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5} < 1$
این عبارت نادرست است.

پ اگر فرض کنیم $x = 3$ و $y = -5$:

$|x| = 3$, $|y| = 5 \Rightarrow |x| < |y|$
این عبارت نادرست است.

ت اگر $x = 5$ و $y = -3$:

$\frac{x}{y} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$, $\frac{y}{x} = \frac{-3}{5} \Rightarrow \frac{x}{y} < \frac{y}{x}$
این عبارت نادرست است.

ث

از طرفی می‌دانیم $x^2 > 0$ و $y^2 > 0$ ، پس:
 $x^2 y^2 > 0$

طرفین عبارت $x - y > 0$ را بر $x^2 y^2$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{x - y}{x^2 y^2} > 0 \Rightarrow \frac{x}{x^2 y^2} - \frac{y}{x^2 y^2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{xy^2} - \frac{1}{x^2 y} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{xy^2} > \frac{1}{x^2 y}$$

۱۸۳۲. **۲** چون $a^1 > 0$ حتماً مثبت است، از نامساوی $a^1 \cdot b^1 < 0$ نتیجه می‌شود $b^1 < 0$ و در نتیجه $b < 0$ است. از طرفی $c^3 b^5 < 0$ و چون $b < 0$ در نتیجه b^5 منفی هستند، پس c^3 و در نتیجه c مثبت است. از طرفی دیگر $a^y c^y > 0$ که چون $c^y > 0$ ، پس a^y و در نتیجه a مثبت است. علامت a ، b و c به ترتیب $+$ ، $-$ و $+$ است. دقت کنید علامت هر عدد و توان فرد آن یکسان است. از این موضوع در حل سؤال استفاده زیادی کردیم!

۱۸۳۳. **۲** با توجه به این که $ab > 0$ ، پس a و b هم‌علامت‌اند؛ یعنی $a, b > 0$ یا $a, b < 0$. از طرفی چون $bc < 0$ ، پس b و c مختلف‌العلامت هستند که یعنی $c > 0$ و $b < 0$ یا $c < 0$ و $b > 0$ است؛ پس داریم:

$ab > 0 \Rightarrow a, b > 0$ یا $a, b < 0$ (۱)
 $bc < 0 \Rightarrow b > 0, c < 0$ یا $b < 0, c > 0$ (۲)

با توجه به دو حالت ممکن هر کدام از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ نادرست است؛ زیرا $a^2 > 0$ و $bc < 0$ ؛ پس:
 $\frac{a^2}{bc} < 0$

۲ درست است؛ زیرا در هر دو حالت، a با c مختلف‌العلامت است.

(۱) $a, b > 0 \Rightarrow c < 0$

(۲) $a, b < 0 \Rightarrow c > 0$

پس $ac < 0$ و $b^2 > 0$ و در نتیجه $\frac{ac}{b^2} < 0$.

۳ نادرست است؛ همواره برقرار نیست:

$$\begin{cases} b < 0, a^2 > 0 \Rightarrow a^2 b < 0 \\ b > 0, a^2 > 0 \Rightarrow a^2 b > 0 \end{cases}$$

۴ نادرست است؛ همواره برقرار نیست:

$$\begin{cases} a > 0, bc < 0 \Rightarrow \frac{a}{bc} < 0 \\ a < 0, bc < 0 \Rightarrow \frac{a}{bc} > 0 \end{cases}$$

۱۸۳۴. **۱** چون $q < 0 < p$ و $|q| = p$ ، پس q و p قرینه هم هستند و در نتیجه $p + q = 0$. از طرفی چون p و q قرینه هستند، پس حاصل ضرب آن‌ها یعنی pq حتماً منفی است.
 $pq < p + q$

۱۸۳۵. **بررسی گزینه‌ها:**

۱ درست است. ✓

$a < b \xrightarrow{\text{c را از دو طرف کم می‌کنیم.}} a - c < b - c$

۲ می‌تواند درست یا نادرست باشد؛ مثلاً اگر b را ۲ و a را ۳- در نظر بگیریم، آن‌گاه $a^2 > b^2$ است.

۳ می‌تواند درست یا نادرست باشد؛ اگر c عددی منفی باشد، با ضرب آن در طرفین نامساوی $a < b$ داریم:

۴ نادرست است. ✗

$a < b \xrightarrow{\text{در } -c^2 \text{ ضرب می‌کنیم.}} -ac^2 > -bc^2$
 $-c^2$ منفی است.

۱۸۳۶. **۴** چون $a + 5 = d - 4 \Rightarrow a = d - 9$ ، پس حتماً $a < d$ است.

$c^2 + 3 = d - 4 \Rightarrow c^2 = d - 7 \Rightarrow d - 7 \geq 0 \Rightarrow d \geq 7$

$c^2 = d - 7 \Rightarrow c = \pm \sqrt{d - 7}$

c منفی، از کوچک‌تر است. $\Rightarrow \begin{cases} c = -\sqrt{d - 7} \\ c = \sqrt{d - 7} < \sqrt{d} < d \end{cases}$

$(d \geq 7 \Rightarrow \sqrt{d} < d)$

$b^2 - 1 = d - 4 \Rightarrow b^2 = d - 5$

b منفی پس، d بزرگ‌تر است. $\Rightarrow \begin{cases} b = -\sqrt{d - 5} \\ b = \sqrt{d - 5} < \sqrt{d} < d \end{cases}$

پس d از a ، b و c بزرگ‌تر است.

۱۸۳۷. **۲** با توجه به این که می‌دانیم طرفین نامساوی منفی نیستند،

طرفین نامساوی داده‌شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$(\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{a + b})^2 \Rightarrow a + b + 2\sqrt{ab} \leq a + b$

$\Rightarrow 2\sqrt{ab} \leq 0 \Rightarrow \sqrt{ab} \leq 0$

۱۸۴۲. ۱ عبارت زیر را دیکال به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای تجزیه می‌شود:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} + 3x < -5 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2} + 3x < -5 \\ \Rightarrow |x-1| + 3x < -5$$

چون $x < 1$ ، پس $x-1 < 0$ و در نتیجه علامت عبارت داخل قدر مطلق حتماً منفی است که قرینه آن خارج می‌شود:

$$-(x-1) + 3x < -5 \Rightarrow -x + 1 + 3x < -5 \\ \Rightarrow 2x < -5 - 1 \Rightarrow 2x < -6 \xrightarrow{\div 2} x < -3$$

۱۸۴۳. ۴ ابتدا طرفین نامعادله را در ۶ ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها حذف شوند. سپس نامعادله را حل می‌کنیم:

$$6 \times (-1 - \frac{x-1}{2}) \leq (\frac{x+1}{3}) \times 6 \\ \Rightarrow -6 - 3x + 3 \leq 2x + 2 \Rightarrow -6 + 3 - 2 \leq 2x + 3x \\ \Rightarrow -5 \leq 5x \xrightarrow{\div 5} -1 \leq x$$

مجموعه جواب نامساوی داده شده را به صورت $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x\}$ می‌توان نشان داد.

۱۸۴۴. ۲ محور داده شده مجموعه جواب $x < 1$ را نمایش می‌دهد، پس گزینه‌ای که همین مجموعه جواب را دارد، انتخاب می‌کنیم:

بررسی گزینه‌ها:

۱ $-3x - 7 < -10 \Rightarrow -7 + 10 < 3x \Rightarrow 3 < 3x \\ \xrightarrow{\div 3} 1 < x$

۲ ابتدا طرفین نامساوی را در ۵ ضرب کرده و سپس نامساوی را حل می‌کنیم:

$$5 \times \frac{-2}{5}(x+2) > -\frac{6}{5} \times 5 \Rightarrow -2x - 4 > -6 \\ \Rightarrow -4 + 6 > 2x \Rightarrow 2 > 2x \xrightarrow{\div 2} 1 > x$$

۳ ابتدا طرفین نامساوی را ساده کرده و سپس نامساوی را حل می‌کنیم:

$$(x+3)^2 \leq 15 + x^2 \Rightarrow x^2 + 9 + 6x \leq 15 + x^2 \\ \Rightarrow 6x \leq 15 - 9 \Rightarrow 6x \leq 6 \xrightarrow{\div 6} x \leq 1$$

۴ طرفین نامساوی را در ۵ ضرب می‌کنیم:

$$5 \times 2 \times (\frac{3}{5}x - 2) > -\frac{14}{5} \times 5 \Rightarrow 6x - 20 > -14 \\ \Rightarrow 6x > -14 + 20 \Rightarrow 6x > 6 \xrightarrow{\div 6} x > 1$$

۱۸۴۵. ۱ برای از بین بردن مخرج‌ها، طرفین نامعادله را در ۲۲ ضرب

$$\frac{8x-3}{-11} < \frac{x+9}{-22} \xrightarrow{\times(-22)} 2(8x-3) > x+9$$

$$\Rightarrow 16x - 6 > x + 9 \Rightarrow 16x - x > 9 + 6$$

$$\Rightarrow 15x > 15 \xrightarrow{\div 15} x > 1$$

بنابراین جواب‌های قابل قبول از بین اعضای مجموعه داده شده عبارت‌اند از $2, 3, 4, \dots, 40$ که تعداد آن‌ها برابر ۳۹ تا است.

۱۸۴۶. ۲ با استفاده از اتحادهای مربع دو جمله‌ای و مزدوج، سمت راست

$$-\frac{5x}{2} \geq (3x+1)^2 - (3x+4)(3x-4)$$

$$\Rightarrow -\frac{5x}{2} \geq 9x^2 + 6x + 1 - (9x^2 - 16)$$

$$\Rightarrow -\frac{5x}{2} \geq 9x^2 + 6x + 1 - 9x^2 + 16$$

از طرفی با توجه به این که a و b دو عدد حسابی کم‌تر از 10° هستند، پس $\sqrt{ab} < 10^\circ$ حتماً بزرگ‌تر مساوی صفر است. با توجه به این که هم $\sqrt{ab} \leq 0^\circ$ و هم $\sqrt{ab} = 0^\circ$ پس $\sqrt{ab} = 0^\circ$ در نتیجه $ab = 0$ است و این اتفاق هم زمانی می‌افتد که $a = 0^\circ$ یا $b = 0^\circ$ باشد؛ پس برای برقراری نامساوی داده شده باید حداقل یکی از متغیرهای a و b برابر صفر باشد.

هر کدام از متغیرهای a و b می‌توانند 10° مقدار مختلف داشته باشند؛ بنابراین کل حالات ممکن $10^\circ \times 10^\circ = 100$ حالت است. همچنین تعداد حالت‌هایی که هیچ کدام از متغیرهای a و b صفر نباشند برابر با $9 \times 9 = 81$ حالت است؛ بنابراین تعداد حالت‌هایی که حداقل یکی از متغیرهای a و b برابر با صفر شوند برابر با $100 - 81 = 19$ است و در نهایت احتمال برقراری نامساوی داده شده برابر $\frac{19}{100}$ که یعنی بیشتر از صفر و کم‌تر از $\frac{1}{5}$ ($\frac{19}{100} < \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$) است.

۱۸۳۸. ۴ با ساده کردن طرفین، حدود x را به دست می‌آوریم:

$$4x + 5 > 4(3x - 2) \Rightarrow 4x + 5 > 12x - 8 \\ \Rightarrow 5 + 8 > 12x - 4x \Rightarrow 13 > 8x \xrightarrow{\div 8} \frac{13}{8} > x$$

۱۸۳۹. ۴ ابتدا سمت چپ نامساوی را به کمک اتحاد جمله مشترک

ساده کرده و سپس طرفین را ساده می‌کنیم:

$$(x+5)(x-3) \leq x^2 + 3x - 11 \\ \Rightarrow x^2 + (5+(-3))x + 5 \times (-3) \leq x^2 + 3x - 11 \\ \Rightarrow x^2 + 2x - 15 \leq x^2 + 3x - 11 \\ \Rightarrow x^2 + 2x - 15 - x^2 - 3x + 11 \leq 0 \\ \Rightarrow -x - 4 \leq 0 \Rightarrow -x \leq 4 \xrightarrow{\div(-1)} x \geq -4$$

۱۸۴۰. ۳ با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای، نامعادله را تا حد امکان

ساده می‌کنیم:

$$(x+4) - 3(x-1)^2 \geq -3x(x-2) + 5 \\ \Rightarrow x + 4 - 3(x^2 - 2x + 1) \geq -3x^2 + 6x + 5 \\ \Rightarrow x + 4 - 3x^2 + 6x - 3 \geq -3x^2 + 6x + 5 \\ \Rightarrow x + 1 \geq 5 \Rightarrow x \geq 5 - 1 \Rightarrow x \geq 4$$

در بین گزینه‌های داده شده عبارت ۳ یعنی $\sqrt{5} - 6$ چون $\sqrt{5} \approx 2/2$ ، پس حاصل $\sqrt{5} - 6$ تقریباً برابر $3/8$ است که در محدوده $x \geq 4$ قرار ندارد.

۱۸۴۱. ۲ ابتدا طرفین نامعادله را ساده کرده و سپس آن را حل می‌کنیم:

$$2(x-3)^2 \leq (x-3)(2x+4) \\ \Rightarrow 2(x^2 - 6x + 9) \leq 2x^2 + 4x - 6x - 12 \\ \Rightarrow 2x^2 - 12x + 18 \leq 2x^2 - 2x - 12 \\ \Rightarrow -12x + 2x \leq -12 - 18 \Rightarrow -10x \leq -30 \\ \xrightarrow{\div(-10)} x \geq 3$$

عددهای بزرگ‌تر و مساوی ۳، عضو مجموعه جواب هستند و چون $2 < \sqrt{11} < 3$ است، پس $5 - \sqrt{11}$ از ۳ کوچک‌تر بوده و جزء مجموعه جواب نیست.

۲۱۶۸. ۲ تعداد دانش‌آموزان و دانشجویان را به ترتیب X و Y فرض می‌کنیم. با تشکیل دستگاه و جای‌گذاری معادله اول در معادله دوم داریم:

$$\begin{cases} x = 2(y - 15) \\ y - 15 = 5(x - 45) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 30 \\ 5x - 225 = y - 15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5(2y - 30) - 225 = y - 15 \Rightarrow 10y - 150 = y - 210$$

$$\Rightarrow 9y = 360 \Rightarrow y = \frac{360}{9} = 40$$

۲۱۶۹. ۳ تعداد مردان را X و تعداد زنان را Y در نظر می‌گیریم. چون نسبت مردان به زنان ۳ به ۵ است، پس:

$$\frac{X}{Y} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5X = 3Y \Rightarrow 5X - 3Y = 0$$

از طرفی ۲۴ زن بازنشسته شده؛ پس تعداد زن‌ها $Y - 24$ و ۲۴ مرد استخدام شده، پس تعداد مردها $X + 24$ می‌شود و می‌دانیم نسبت مردان به زنان ۵ به ۳ است، پس:

$$\frac{X + 24}{Y - 24} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3(X + 24) = 5(Y - 24)$$

$$\Rightarrow 3X + 72 = 5Y - 120 \Rightarrow 3X - 5Y = -192$$

حالا معادله‌های به‌دست‌آمده را در دستگاه قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} 5X - 3Y = 0 \\ (-3) \times (3X - 5Y) = -192 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5X - 3Y = 0 \\ -9X + 15Y = 576 \end{cases}$$

$$16X = 576 \Rightarrow X = \frac{576}{16} = 36$$

۲۱۷۰. ۱ پول صندوق اول را X و پول صندوق دوم را Y در نظر می‌گیریم. جابه‌جایی پول‌ها در دو صندوق به صورت زیر بوده است.

	صندوق اول	صندوق دوم
	X	Y
مرحله (۱)	$X - 6000$	$Y + 6000$
مرحله (۲)	$\frac{X - 6000 + 9000}{X + 3000}$	$\frac{Y + 6000 - 9000}{Y - 3000}$

چون پول صندوق دوم ۲۰۰۰ تومان کمتر از پول صندوق اول است، پس:

$$X + 3000 = Y - 3000 + 2000 \Rightarrow X + 3000 = Y - 1000$$

$$\Rightarrow X - Y = -4000$$

چون کل پول مریم ۳۶۰۰۰ تومان است، با تشکیل دستگاه داریم:

$$\begin{cases} X + Y = 36000 \\ X - Y = -4000 \end{cases}$$

$$2X = 32000 \Rightarrow X = \frac{32000}{2} = 16000$$

۲۱۷۱. ۱ مبلغی که پدر داده را X و مبلغی را که برادر بزرگ داده را Y فرض می‌کنیم و داریم:

$$\begin{cases} X = \frac{Y + 10000}{2} \\ Y = \frac{10000 + X}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2X - Y = 10000 \\ 3Y - X = 10000 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2X - Y = 10000 \\ 6Y - 2X = 20000 \end{cases}$$

$$5Y = 30000 \Rightarrow Y = \frac{30000}{5} = 6000$$

$$2X - Y = 10000 \xrightarrow{Y=6000} 2X - 6000 = 10000$$

$$\Rightarrow 2X = 16000 \Rightarrow X = \frac{16000}{2} = 8000$$

قیمت کتاب برابر با مجموع پول سه نفر است؛ پس:

$$6000 + 8000 + 10000 = 24000$$

۲۱۷۲. ۳ سن پدر و پسر را به ترتیب X و Y در نظر می‌گیریم. دو سال

پیش سن هر کدام $X - 2$ و $Y - 2$ و سه سال بعد سن هر کدام $X + 3$ و $Y + 3$ است.

$$\begin{cases} (X - 2) = 7(Y - 2) \\ X + 3 = 4(Y + 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 7Y - 12 \\ X = 4Y + 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 7Y - 12 = 4Y + 9 \Rightarrow 3Y = 12 + 9 = 21 \Rightarrow Y = 7$$

$$X = 4Y + 9 \xrightarrow{Y=7} X = 4 \times 7 + 9 = 28 + 9 = 37$$

اختلاف سنی پدر و پسر برابر است با: $37 - 7 = 30$

۲۱۷۳. ۱ سن رضا در حال حاضر را X و سن علی در حال حاضر را Y در

نظر می‌گیریم. با توجه به سؤال علی سن بیشتری دارد. هم‌چنین جمله «علی

گفت: وقتی به سن امروز تو بودم.» به صورت ریاضی یعنی $Y - X$ سال قبل؛

$$\text{پس: } X - (Y - X) = \frac{1}{3}Y \Rightarrow 2X = \frac{1}{3}Y + Y \Rightarrow 2X = \frac{4}{3}Y$$

$$\Rightarrow 3X = 2Y$$

وقتی تو به سن من برسی هم یعنی $Y - X$ سال بعد؛ پس:

$$Y + (Y - X) = 2X \Rightarrow 2Y = 3X$$

هم‌چنین می‌دانیم اختلاف سن رضا و علی ۸ سال است، پس: $Y - X = 8$

با تشکیل دستگاه داریم:

$$\begin{cases} Y - X = 8 \\ 3X = 2Y \end{cases} \Rightarrow 3X = 2(8 + X) \Rightarrow 3X = 16 + 2X \Rightarrow X = 16$$

$$Y - X = 8 \xrightarrow{X=16} Y - 16 = 8 \Rightarrow Y = 8 + 16 = 24$$

۲۱۷۴. ۳ سن پدر را P و سن فرزندان را به ترتیب X ، Y و Z در نظر

$$P = X + Y + Z$$

می‌گیریم.

$$\begin{cases} P + 10 = 2(X + 10) \\ P + 20 = 2(Y + 20) \\ P + 30 = 2(Z + 30) \end{cases}$$

$$2P + 60 = 2(X + Y + Z + 60) \Rightarrow 2P + 60 = 2P + 120 \Rightarrow P = 60$$

۲۱۷۵. ۱ قد حمید را X ، قد حامد را Y ، قد محمد را Z و قد محمود را T در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\begin{cases} Y - X = X - Z = T - Z, \quad X = 184 \\ \frac{X + Y + Z + T}{4} = 178 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y - X = X - Z \Rightarrow Y + Z = 2X$$

$$\frac{X + Y + Z + T}{4} = 178 \Rightarrow X + \underbrace{Y + Z}_{2X} + T = 4 \times 178$$

$$\Rightarrow 3X + T = 712 \xrightarrow{X=184} 3 \times 184 + T = 712 \Rightarrow T = 160$$

۲۱۷۶. ۲ تعداد پسرها در سال قبل را X و تعداد دخترها در سال قبل

را Y در نظر می‌گیریم.

$$X + \frac{5}{100}X = X + 0.05X = 1.05X$$

تعداد پسران امسال

$$Y + \frac{20}{100}Y = Y + 0.2Y = 1.2Y$$

تعداد دختران امسال

$$(X + Y) + \frac{10}{100}(X + Y) = 1.1(X + Y)$$

تعداد دختران و پسران امسال

۲۱۸۱. ۱ نقطه برخورد دو خط را چون روی محور طول‌ها قرار دارد به صورت

$\begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}$ در نظر می‌گیریم. با جای‌گذاری این نقطه در معادله خط‌ها داریم:

$$2my + (m-2)x = 3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}} (m-2)k = 3$$

$$3y - 6x = 12 \xrightarrow{\begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}} -6k = 12 \Rightarrow k = \frac{12}{-6} = -2$$

با جای‌گذاری مقدار k در معادله اول داریم:

$$(m-2) \times (-2) = 3 \Rightarrow -2m + 4 = 3 \Rightarrow -2m = -1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

۲۱۸۲. ۴ نقطه تقاطع دو خط روی هر دوی آن‌ها قرار دارد، پس طول

یک را در معادله اول قرار داده و نقطه تقاطع را به دست می‌آوریم.

$$2x + y - 3 = 0 \xrightarrow{x=1} 2 + y - 3 = 0 \Rightarrow y = 1$$

حالا مختصات نقطه برخورد یعنی $(1, 1)$ را در معادله دوم قرار داده و مقدار m را به دست می‌آوریم.

$$(m-1)x - 2y = 0 \xrightarrow{(1,1)} (m-1) \times 1 - 2 \times 1 = 0$$

$$\Rightarrow m - 1 = 2 \Rightarrow m = 3$$

۲۱۸۳. ۱ مختصات نقطه M را در دو معادله خط قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} ax + by = 5 \\ x - by = 4 \end{cases} \xrightarrow{\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}} \begin{cases} -2a + 3b = 5 \\ -2 - 3b = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = \frac{6}{-3} = -2$$

$$\Rightarrow -2a + 3b = 5 \xrightarrow{b=-2} -2a + 3 \times (-2) = 5$$

$$\Rightarrow -2a = 11 \Rightarrow a = \frac{-11}{2}$$

حاصل $2a + b$ برابر است با:

$$2a + b = 2\left(\frac{-11}{2}\right) + (-2) = -11 - 2 = -13$$

۲۱۸۴. ۲ ابتدا معادله خط $bx^2 + ax^2 - ax + 3 - by + ax^2 = bx^2 + x^2 - ax + 3$ را به

این صورت مرتب می‌کنیم:

$$\Rightarrow by = (b+1-a)x^2 - ax + 3$$

از آن‌جا که معادله داده‌شده مربوط به خط راست است، پس ضریب x^2

در آن باید برابر صفر باشد.

$b+1-a=0 \Rightarrow -a+b=-1$ از طرفی نقطه $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ روی خط $ax + by = 5$ قرار دارد، پس مختصات

آن در معادله خط صدق می‌کند.

$$ax + by = 5 \xrightarrow{\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}} a \times (-3) + b \times 4 = 5$$

$$\Rightarrow -3a + 4b = 5$$

حالا دو معادله به‌دست‌آمده را در دستگاه قرار داده و آن را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} -3a + b = -1 \\ -3a + 4b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - 3b = 3 \\ -3a + 4b = 5 \end{cases}$$

$$3a - 3b - 3a + 4b = 3 + 5$$

$$\Rightarrow b = 8$$

$$-a + b = -1 \xrightarrow{b=8} -a + 8 = -1 \Rightarrow -a = -9 \Rightarrow a = 9$$

حاصل $2a - 3b$ برابر است با:

$$2 \times 9 - 3 \times 8 = 18 - 24 = -6$$

حالا با تشکیل دستگاه داریم:

$$\begin{cases} x - y = 30 \\ 100 \times \left(\frac{1}{10} \times 5x + \frac{1}{20} y \right) = \frac{1}{10} (x + y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 30 \\ 10 \times 5x + 120 \times y = 110 \times (x + y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x + 5y = -150 \\ 5x - 10y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5y = -150 \\ 5x - 10y = 0 \end{cases}$$

$$-5y = -150 \Rightarrow y = \frac{-150}{-5} = 30$$

$$x - y = 30 \xrightarrow{y=30} x - 30 = 30 \Rightarrow x = 60$$

تعداد عضوهای امسال برابر است با:

$$\frac{1}{10} (x + y) \xrightarrow{\frac{x=60}{y=30}} \frac{1}{10} (60 + 30) = \frac{1}{10} \times 90 = 9$$

۲۱۷۷. ۴ اگر تعداد افراد نشسته و ایستاده را به ترتیب X و Y فرض

کنیم، تعداد کل افراد $X + Y$ است؛ پس داریم:

$$\frac{25}{100} x + y - \frac{25}{100} y = \frac{7}{100} (x + y)$$

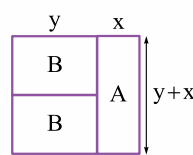
$$\xrightarrow{\times 100} 25x + 100y - 25y = 70x + 70y \Rightarrow -45x + 5y = 0$$

$$\xrightarrow{\div 5} -9x + y = 0 \Rightarrow y = 9x$$

نسبت افراد ایستاده به کل افراد برابر $\frac{y}{x+y}$ است که داریم:

$$\frac{y}{x+y} \xrightarrow{y=9x} \frac{9x}{x+9x} = \frac{9x}{10x} = \frac{9}{10} = \frac{90}{100} = 90\%$$

۲۱۷۸. ۴ فرض می‌کنیم مربع به صورت زیر به ۳ مستطیل تقسیم شده است.



حالا محیط مستطیل‌های A و B را حساب

کرده و دستگاه تشکیل می‌دهیم.

$$A \text{ مستطیل: } (x + y + x) \times 2 = 20 \Rightarrow 2x + y = 20 \Rightarrow \frac{2}{2} = 10$$

$$B \text{ مستطیل: } (y + \frac{x+y}{2}) \times 2 = 20 \Rightarrow 2y + x + y = 20$$

$$\Rightarrow 3y + x = 20$$

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 3y + x = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 10 \\ -6y - 2x = -40 \end{cases}$$

$$-5y = -30 \Rightarrow y = 6$$

$$2x + y = 10 \xrightarrow{y=6} 2x + 6 = 10 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین ضلع مربع برابر $x + y$ یعنی ۸ است؛ پس مساحت آن 8×8

یعنی ۶۴ است.

توجه: در شکل می‌دانیم دو مستطیل با هم برابر هستند، پس ضلع

عمودی آن‌ها نصف ضلع مربع است.

۲۱۷۹. ۳ ابتدا مختصات نقطه را به کمک معادله دوم حساب می‌کنیم.

$$y = 2x + 3 \xrightarrow{x=4} y = 2 \times 4 + 3 = 11 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \end{bmatrix}$$

حالا با جای‌گذاری مختصات نقطه در معادله اول داریم:

$$y = x + m \xrightarrow{(4,11)} 11 = 4 + m \Rightarrow m = 7$$

۲۱۸۰. ۲ نقطه‌ای که دو خط یکدیگر را قطع می‌کنند دارای طول صفر و

عرض برابر است، پس:

$$x + ay - 2 = 0 \xrightarrow{x=0} 0 + ay - 2 = 0 \Rightarrow ay = 2$$

$$(a+2)x + y = 1 \xrightarrow{x=0} (a+2) \times 0 + y = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$ay = 2 \xrightarrow{y=1} a \times 1 = 2 \Rightarrow a = 2$$

۲۴۳۸. ۲ مثل همیشه ابتدا مقسوم علیه را برابر صفر قرار می دهیم.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

چون مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر است پس حاصل مقسوم به ازای مقادیر x برابر صفر است.

$$x^6 + ax^4 + bx^3 + 1 = 0 \Rightarrow a + b = -2$$

$$x = -1 \Rightarrow (-1)^6 + a \times (-1)^4 + b \times (-1)^3 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow a - b = -2$$

حالا دو معادله به دست آمده را در دستگاه قرار داده و m و n را به دست می آوریم.

$$a + b = -2$$

$$2a = -4 \Rightarrow a = -2$$

$$a + b = -2 \xrightarrow{a=-2} -2 + b = -2 \Rightarrow b = 0$$

بنابراین $2a - 3b$ برابر است با:

$$2(-2) + 0 = -4$$

۲۴۳۹. ۴ چون باقی مانده تقسیم بر ۱ و $x - 2$ به ترتیب برابر ۱ و -2 است پس عبارت به ازای $x = 2$ و $x = -1$ به ترتیب برابر ۱ و -2 است.

$$3x^4 + ax^2 + b$$

$$x = -1 \Rightarrow 3 \times (-1)^4 + a \times (-1)^2 + b = 1 \Rightarrow a + b = -2$$

$$x = 2 \Rightarrow 3 \times (2)^4 + a \times 2^2 + b = -2 \Rightarrow 4a + b = -5$$

حالا معادلات به دست آمده را در دستگاه قرار داده و a و b را به دست می آوریم.

$$4a + b = -5$$

$$4a + b - (a + b) = -5 - (-2) \Rightarrow 3a = -4 \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$$

$$a + b = -2 \xrightarrow{a=-\frac{4}{3}} -\frac{4}{3} + b = -2 \Rightarrow b = -\frac{2}{3}$$

$$(a - b)^{-1} = \frac{1}{a - b} = \frac{1}{-\frac{4}{3} - (-\frac{2}{3})} = -\frac{3}{2}$$

۲۴۴۰. ۲ چون مقسوم علیه $x^2 - 1$ است، پس مقسوم به ازای $x^2 = 1$

$$(a - b)x^2 + 2(a - 3)x + b^2 - 9 = 2x + 1$$

$$\xrightarrow{x^2=1} (a - b) + 2(a - 3)x + b^2 - 9 = 2x + 1$$

با متحد قراردادن طرفین تساوی به دست آمده داریم:

$$\bullet 2(a - 3) = 2 \Rightarrow a - 3 = 1 \Rightarrow a = 4$$

$$\bullet b^2 - 9 + (a - b) = 1 \xrightarrow{a=4} (b - 3)(b + 3) + 4 - b = 1$$

$$\Rightarrow (b - 3)(b + 3) - (b - 3) = 0 \Rightarrow (b - 3)(b + 3 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3 \\ b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2 \end{cases}$$

۲۴۴۱. ۱ چون چند جمله ای بر $x^2 - 3x + b$ بخش پذیر است، پس

به ازای $x^2 = 3x - b$ برابر صفر می شود.

$$x^3 + ax + 1 = x^2 \times x + ax + 1$$

$$\xrightarrow{x^2=3x-b} (3x - b)x + ax + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - bx + ax + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{x^2=3x-b} 3(3x - b) - bx + ax + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 9x - 3b - bx + ax + 1 = 0 \Rightarrow (a - b + 9)x + 1 - 3b = 0$$

تساوی به دست آمده وقتی برقرار است که ضریب x و $1 - 3b$ برابر صفر باشد.

$$1 - 3b = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

$$a - b + 9 = 0 \xrightarrow{b=\frac{1}{3}} a - \frac{1}{3} + 9 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{3} - 9 = \frac{1 - 27}{3} = -\frac{26}{3}$$

در نهایت $a + 2b$ برابر است با:

$$a + 2b = -\frac{26}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = -\frac{26}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{24}{3} = -8$$

۲۴۴۲. ۴ روش ۱ هر کدام از گزینه ها را مساوی صفر قرار داده و

سپس با جای گذاری عبارت به دست آمده در $x^4 + 1$ اگر حاصل برابر

صفر شد یعنی بخش پذیر است.

$$۱ \quad x^{12} + 1 = 0 \Rightarrow x^{12} = -1$$

$$x^{48} + 1 = (x^{12})^4 + 1 \xrightarrow{x^{12}=-1} (-1)^4 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$۲ \quad x^8 + 1 = 0 \Rightarrow x^8 = -1$$

$$x^{48} + 1 = (x^8)^6 + 1 \xrightarrow{x^8=-1} (-1)^6 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$۳ \quad x^6 + 1 = 0 \Rightarrow x^6 = -1$$

$$x^{48} + 1 = (x^6)^8 + 1 \xrightarrow{x^6=-1} (-1)^8 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$۴ \quad x^{16} + 1 = 0 \Rightarrow x^{16} = -1$$

$$x^{48} + 1 = (x^{16})^3 + 1 \xrightarrow{x^{16}=-1} (-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$$

روش ۲ x^{48} را به صورت زیر نوشته و سپس عبارت را به کمک اتحاد چاق و لاغر

$$x^{48} + 1 = (x^{16})^3 + 1 = (x^{16} + 1)(x^{32} - x^{16} + 1)$$

تجزیه می کنیم. پس عبارت داده شده بر $x^{16} + 1$ بخش پذیر است.

۲۴۴۳. ۱ در هر گزینه مقسوم را برابر صفر قرار داده و x را به دست

می آوریم، سپس با جای گذاری معادل x در مقسوم، حاصل را بررسی می کنیم.

$$۱ \quad x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

$$x^n + y^n \xrightarrow{x=y} y^n + y^n \neq 0 \quad \text{پس بخش پذیر نیست.}$$

$$۲ \quad x + y = 0 \Rightarrow x = -y$$

$$x^n + y^n \xrightarrow{x=-y} (-y)^n + y^n$$

چون n فرد است پس $(-y)^n$ را می توان به صورت $-y^n$ نوشت که

داریم:

$$(-y)^n + y^n = -y^n + y^n = 0 \quad \text{پس بخش پذیر است.}$$

$$۳ \quad x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

$$x^n - y^n \xrightarrow{x=y} y^n - y^n = 0 \quad \text{پس بخش پذیر است.}$$

$$۴ \quad x + y = 0 \Rightarrow x = -y$$

$$x^n - y^n = (-y)^n - y^n$$

چون n زوج است، پس $(-y)^n$ برابر y^n است.

$$y^n - y^n = 0 \quad \text{در نتیجه:}$$

پس بخش پذیر است.

۲۴۴۴. ۳ می دانیم $a^n + b^n$ اگر n فرد باشد بر $a + b$ بخش پذیر

است، پس $5^9 + 31^9$ بر $5 + 31$ یعنی 36 و شمارنده های آن بخش پذیر

است. پس از بین گزینه ها بر 8 بخش پذیر نیست.

۲۴۴۸. ۳ چون مقسوم‌علیه یعنی $(x-1)(x-2)(x+1)$ از درجه ۳

است، پس باقی‌مانده حداکثر از درجه ۲ است. پس باقی‌مانده را به صورت $ax^2 + bx + c$ در نظر گرفته و با توجه به باقی‌مانده‌های داده‌شده داریم:

$$\bullet x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$ax^2 + bx + c \xrightarrow{x=1} a + b + c = 3$$

$$\bullet x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$ax^2 + bx + c \xrightarrow{x=2} a \times 2^2 + b \times 2 + c = 7$$

$$\Rightarrow 4a + 2b + c = 7$$

$$\bullet x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$ax^2 + bx + c \xrightarrow{x=-1} a \times (-1)^2 + b \times (-1) + c = 5$$

$$\Rightarrow a - b + c = 5$$

حالا با قراردادن معادله اول و سوم به‌دست آمده در دستگاه داریم:

$$\begin{array}{r} a + b + c = 3 \\ -a - b + c = 5 \\ \hline 2b = -2 \Rightarrow b = -1 \end{array}$$

در ادامه با قراردادن معادله اول و دوم و جای‌گذاری b داریم:

$$\begin{array}{l} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 4 \\ 4a + c = 9 \end{cases} \\ \hline 3a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{3} \\ \begin{cases} a + b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 1 + c = 3 \\ 4a - 2 + c = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 4 \\ 4a + c = 9 \end{cases} \\ \hline 3a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{3} \end{array}$$

$$\bullet a + c = 4 \xrightarrow{a=\frac{5}{3}} \frac{5}{3} + c = 4 \Rightarrow c = 4 - \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$$

$$ax^2 + bx + c \Rightarrow \frac{5}{3}x^2 - x + \frac{7}{3}$$

پس باقی‌مانده برابر است با:

۲۴۴۹. ۳

توجه: اگر باقی‌مانده A بر C برابر R_1 و باقی‌مانده B بر C برابر R_2

باشد، باقی‌مانده $A \times B$ بر C برابر $R_1 \times R_2$ است؛ اما باید حواسمان باشد

اگر درجه $R_1 \times R_2$ از C کم‌تر نشد، باید تقسیم را ادامه دهیم.

باقی‌مانده تقسیم $A \times B$ بر $x(x-2)$ برابر است با:

$$(2x-1)(2x+1) = 4x^2 - 1$$

چون درجه باقی‌مانده با مقسوم یعنی $x(x-2)$ مساوی است، یعنی

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 1 \\ \underline{x^2 - 2x} \\ 4x^2 - 8x \\ \underline{-(4x^2 - 8x)} \\ 8x - 1 \end{array}$$

بنابراین باقی‌مانده اصلی برابر $8x-1$ است.

۲۴۵۰. ۴ مخرج مشترک بین هر سه کسر برابر $(x-y)(x-z)(y-z)$

است، پس:

$$\begin{aligned} & \frac{x+1}{(x-y)(x-z)} + \frac{y+1}{(y-z)(y-x)} + \frac{z+1}{(z-x)(z-y)} \\ &= \frac{x+1}{(x-y)(x-z)} + \frac{y+1}{-(y-z)(x-y)} + \frac{z+1}{(x-z)(y-z)} \\ &= \frac{(x+1)(y-z) - (y+1)(x-z) + (z+1)(x-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)} \\ &= \frac{xy - xz + y - z - yx + yz - x + z + zx - zy + x - y}{(x-y)(x-z)(y-z)} = 0 \end{aligned}$$

۲۴۴۵. ۲ در مقسوم پراترها را طوری دسته‌بندی و ضرب کرده که

$x^2 + 9x$ ساخته شود (زیرا مقسوم‌علیه دارای $x^2 + 9x$ است)، پس:

$$\begin{aligned} & (x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)(x+7) + 4x + 5 \\ &= (x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)(x+7) + 4x + 5 \\ &= (x^2 + 9x + 14)(x^2 + 9x + 18)(x^2 + 9x + 20) + 4x + 5 \end{aligned}$$

برای محاسبه باقی‌مانده تقسیم بر $x^2 + 9x + 15$ کافی است آن را برابر صفر

قرار داده و $x^2 + 9x$ را به دست بیاوریم و سپس مقدار به‌دست‌آمده را در

عبارت جای‌گذاری کنیم. $x^2 + 9x + 15 = 0 \Rightarrow x^2 + 9x = -15$

$$\begin{aligned} & (-15+14)(-15+18)(-15+20) + 4x + 5 = (-1)(3)(5) + 4x + 5 \\ &= 4x - 10 \end{aligned}$$

بنابراین باقی‌مانده برابر $4x - 10$ است.

۲۴۴۶. ۳ باقی‌مانده تقسیم P بر $(x-1)(2x-4)$ حداکثر از درجه

۱ است (زیرا درجه مقسوم‌علیه ۲ است و درجه باقی‌مانده حداکثر یکی

کم‌تر از مقسوم‌علیه است)، پس باقی‌مانده را به صورت $ax + b$ در نظر

می‌گیریم و چون باقی‌مانده P در تقسیم بر $x-1$ و $2x-4$ به ترتیب ۳

و ۴ است، پس داریم:

$$\bullet x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$ax + b \xrightarrow{x=1} a + b = 3$$

$$\bullet 2x-4=0 \Rightarrow x=2$$

$$ax + b \xrightarrow{x=2} 2a + b = 4$$

با تشکیل دستگاه، a و b در نتیجه باقی‌مانده به دست می‌آید.

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b = 4 \end{cases}$$

$$a + b - (2a + b) = 3 - 4 \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1, b = 2$$

پس باقی‌مانده برابر $x + 2$ است.

۲۴۴۷. ۴ با توجه به مقسوم‌علیه و باقی‌مانده‌های داده‌شده، رابطه

تقسیم را می‌نویسیم، فرض می‌کنیم چندجمله‌ای موردنظر، P باشد:

به ازای $x=1$ ، مقدار P برابر ۴ است. $P = (x-1)q + 4 \Rightarrow$

به ازای $x=-3$ ، مقدار P برابر ۲ است. $P = (x+3)q' + 2 \Rightarrow$

باقی‌مانده تقسیم P بر عبارت درجه دوم $x^2 + 2x - 3$ یک چندجمله‌ای

حداکثر از درجه ۱ یعنی به صورت $ax + b$ است؛ پس داریم:

$$P = (x^2 + 2x - 3)Q + ax + b$$

چون P به ازای $x=1$ برابر ۴ و به ازای $x=-3$ برابر ۲ است، داریم:

$$x=1 \Rightarrow 4 = (1^2 + 2 \times 1 - 3)Q + a \times 1 + b \Rightarrow 4 = a + b$$

$$\begin{aligned} x=-3 \Rightarrow 2 &= ((-3)^2 + 2 \times (-3) - 3)Q + a \times (-3) + b \\ \Rightarrow 2 &= -3a + b \end{aligned}$$

حالا با تشکیل دستگاه، مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:

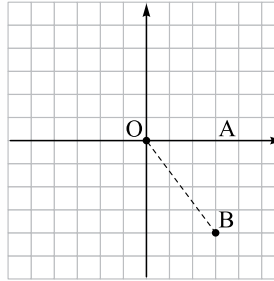
$$\begin{cases} a + b = 4 \\ -3a + b = 2 \end{cases} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{cases} a + b = 4 \\ 3a - b = -2 \end{cases} \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در رابطه اول}} \frac{1}{2} + b = 4 \Rightarrow b = \frac{7}{2}$$

پس باقی‌مانده تقسیم برابر است با: $ax + b = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ باقی‌مانده

۲۷۱۲. ۱ حجم حاصل از دوران یک دایره حول قطرش یک کره است؛

پس لازم است شعاع دایره مورد نظر را محاسبه کنیم:



$$OB^2 = OA^2 + AB^2$$

$$OB^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow OB = 5$$

$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3 = \frac{500\pi}{3}$$

۲۷۱۳. ۱ اگر شکل مورد نظر را حول EF دوران دهیم، یک مخروط به شعاع قاعده DC و ارتفاع DF، یک استوانه به شعاع قاعده AB و ارتفاع AD و یک نیم کره به شعاع AB داریم:

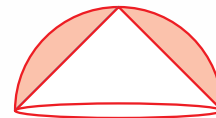
$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \times \pi \times DC^2 \times DF = \frac{8}{3} \pi$$

$$V_{\text{استوانه}} = \pi \times AB^2 \times AD = 8\pi$$

$$V_{\text{نیم کره}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \times AB^3 = \frac{16\pi}{3}$$

$$V_{\text{کل}} = \left(\frac{8}{3} + \frac{16}{3} + 8\right) \pi = 16\pi \stackrel{\pi=3}{=} 48$$

۲۷۱۴. ۳ به شکل روبهرو دقت کنید. حجم

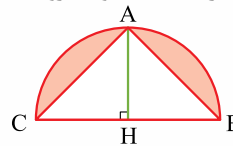


مورد نظر یک نیم کره است به شعاع ۳ که یک مخروط به شعاع قاعده و ارتفاع ۳ از آن کم شده است:

$$V_{\text{نیم کره}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \times 3^3 = 18\pi, \quad V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 3 = 9\pi$$

$$V = 18\pi - 9\pi = 9\pi$$

۲۷۱۵. ۳ حجم مورد نظر یک کره است به قطر BC که دو مخروط به شعاع قاعده AH و مجموع ارتفاع BC از آن کم شده:



ابتدا AH و BC را محاسبه می کنیم:

$$BC^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 2 + 2 = 4 \Rightarrow BC = 2 \Rightarrow BH = 1$$

$$AH^2 + BH^2 = AB^2$$

$$AH^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow AH = 1$$

حال با داشتن BC و AH حجم مورد نظر را محاسبه می کنیم:

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3} \times \pi \times AH^3 = \frac{4}{3} \pi$$

$$V_{\text{دو مخروط}} = 2 \times \frac{1}{3} \times \pi \times AH^2 \times BH = \frac{2}{3} \pi$$

$$V = \frac{4}{3} \pi - \frac{2}{3} \pi = \frac{2}{3} \pi$$

۲۷۱۶. ۱ اگر شکل مورد نظر را به طور کامل

حول محور عرضها دوران دهیم، یک مخروط تشکیل می شود به شعاع قاعده OB و ارتفاع OC؛ پس داریم:



$$\text{روی } B: y_B = 0 \Rightarrow x_B = \sqrt{2} \Rightarrow OB = \sqrt{2}$$

$$\text{روی } C: x_C = 0 \Rightarrow y_C = \sqrt{2} \Rightarrow OC = \sqrt{2}$$

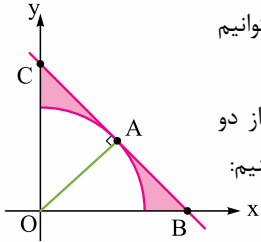
$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \times \pi \times (\sqrt{2})^2 \times \sqrt{2} = \frac{2}{3} \sqrt{2} \pi$$

حال باید شعاع نیم دایره را پیدا کنیم تا بتوانیم

حجم نیم کره حذف شده را از آن کم کنیم:

می دانیم OA بر BC عمود است؛ پس از دو

راه مساحت مثلث OBC را محاسبه می کنیم:



$$OB^2 + OC^2 = BC^2 \Rightarrow BC^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4 \Rightarrow BC = 2$$

$$S_{\triangle OBC} = \frac{OC \times OB}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2} = 1$$

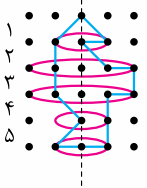
$$S_{\triangle OBC} = \frac{OA \times BC}{2} = \frac{OA \times 2}{2} = 1 \Rightarrow OA = 1$$

با داشتن حجم نیم کره را محاسبه می کنیم:

$$V_{\text{نیم کره}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 1^3 = \frac{2}{3} \pi$$

$$\text{پس حجم مورد نظر برابر است با: } \frac{2}{3} \sqrt{2} \pi - \frac{2}{3} \pi = \frac{2}{3} \pi (\sqrt{2} - 1)$$

۲۷۱۷. ۱ به شکلی که رسم شده با دقت نگاه کنید. هر سطر یا یک استوانه می شود یا یک مخروط.



سطر یک: مخروطی به شعاع قاعده ۱ و ارتفاع ۱:

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi$$

سطر دو: استوانه ای به شعاع قاعده ۱ و ارتفاع ۱:

$$V_2 = \pi r^2 h = \pi$$

سطر سه: استوانه ای به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۱:

سطر چهار و پنج: استوانه ای به شعاع قاعده ۱ و ارتفاع ۱:

$$V_4 = V_5 = \pi r^2 h = \pi$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = \frac{1}{3} \pi + \pi + 4\pi + \pi + \pi = 7\frac{1}{3} \pi$$

۲۷۱۸. ۴ ارتفاع یک مثلث متساوی الاضلاع $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ضلع آن بوده و محل تقاطع ارتفاعها (مرکز دایره)، آن ها را به دو قسمت به نسبت ۲ به ۱

تقسیم می کند؛ پس داریم:

$$r = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = 1$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi \times \underbrace{\sqrt{3}^2}_{\text{شعاع قاعده}} \times \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3}\right)}_{\text{ارتفاع}} = 3\pi$$

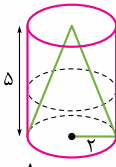
۲۷۱۹. ۲ حجم مخروط مورد نظر دقیقاً $\frac{1}{3}$ حجم استوانه مورد نظر

است، چون مساحت قاعده و ارتفاع آن ها یکی است؛ پس حجم استوانه برابر است با:

$$\frac{128}{3} \pi \times 3 = 128\pi$$

۲۷۲۰. ۱ برای پاسخ به این سؤال کافی است مساحت دایره ای را پیدا

کنیم که از قطع کردن مخروط ایجاد می شود:



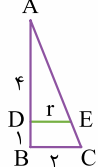
$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow r = \frac{4}{5} = 1/6$$

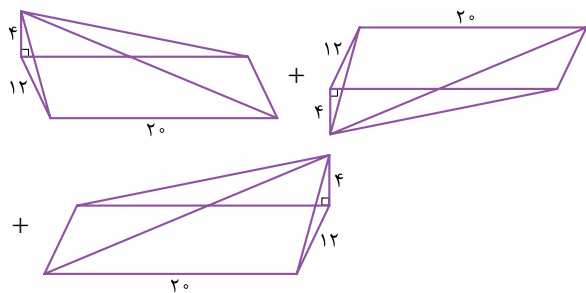
$$S_{\text{مقطع استوانه}} = \pi \times 2^2 = 4\pi$$

$$S_{\text{مقطع مخروط}} = \pi \times (1/6)^2 = 2/56\pi$$

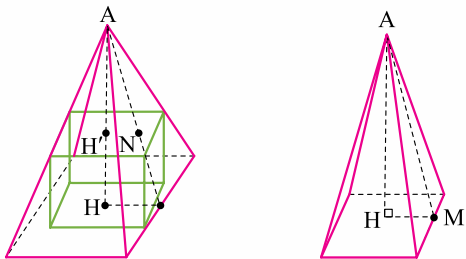
$$\text{اختلاف مساحتها} = 4\pi - 2/56\pi = 1/44\pi$$



سؤال از ما پرسیده حداکثر چه تعداد هرم با حجم 320 m^3 داخل مکعب مستطیلی با حجم 960 m^3 قرار می‌گیرد. چون 960 سه برابر 320 است؛ پس سه هرم با حجم 320 m^3 داخل این استخر قرار می‌گیرند سه هرم مورد نظر ما به شکل زیر هستند:



۲۷۲۶. ابتدا باید ارتفاع هرم را محاسبه کنیم.

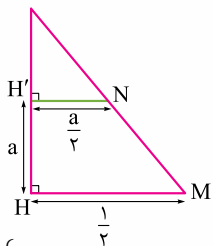


مثلاً AHM را در نظر بگیرید.

$$HM = \frac{1}{\sqrt{2}}, AM = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع})$$

$$\Rightarrow AH^2 = AM^2 - HM^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \Rightarrow AH = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

برای به دست آوردن حجم مکعب باید ابتدا طول ضلع آن را به دست آوریم. ضلع مکعب را a در نظر می‌گیریم.



$$\begin{cases} H'N \parallel HM \Rightarrow \frac{AH'}{AH} = \frac{a/2}{1/2} \Rightarrow \frac{AH'}{1/\sqrt{2}} = a \Rightarrow AH' = \frac{a}{\sqrt{2}} \\ AH = AH' + a = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2}} + a = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \times \frac{1}{\sqrt{2}+1} \stackrel{\text{گویا}}{=} \sqrt{2}-1 \Rightarrow a^2 = (\sqrt{2}-1)^2$$

$$= (\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2})(-1) + (-1)^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$$

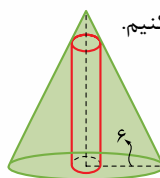
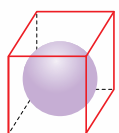
$$= 2\sqrt{2} - 6 + 3\sqrt{2} - 1 = 5\sqrt{2} - 7$$

۲۷۲۷. با توجه به اطلاعات صورت سؤال، شعاع کره مورد نظر برابر

با $\frac{a}{\sqrt{2}}$ است؛ پس داریم:

$$S_{\text{مکعب}} = 6a^2$$

$$S_{\text{کره}} = 4\pi(\frac{a}{\sqrt{2}})^2 = \pi a^2, \quad \frac{S_{\text{کره}}}{S_{\text{مکعب}}} = \frac{\pi a^2}{6a^2} = \frac{\pi}{6}$$



۲۷۲۱. ابتدا لازم است ارتفاع استوانه را محاسبه کنیم.

با توجه به شکل داریم:

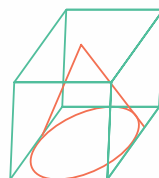
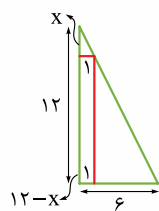
$$\frac{1}{6} = \frac{x}{12} \Rightarrow 12 = 6x \Rightarrow x = 2$$

پس استوانه تا ارتفاع ۱۰ سانتی‌متری بالا می‌آید:

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 12 = 144\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{استوانه}} = \pi R^2 h = \pi \times 10 \times 10 = 100\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{باقی‌مانده}} = 144\pi - 100\pi = 44\pi \text{ cm}^3$$



۲۷۲۲. با توجه به شکل:

قطر قاعده مخروط برابر با ضلع مربع a ، شعاع آن $\frac{a}{\sqrt{2}}$ و ارتفاع آن برابر با ارتفاع مکعب یعنی a است.

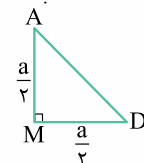
$$S_{\text{قاعده}} = \pi r^2 = \pi \times (\frac{a}{\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{2} \pi a^2$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \pi a^2 \times a = \frac{1}{6} \pi a^3$$

حال که حجم مخروط را داریم، می‌توانیم نسبت حجم مخروط به مکعب را پیدا کنیم:

$$\frac{V_{\text{مخروط}}}{V_{\text{مکعب}}} = \frac{\frac{1}{6} \pi a^3}{a^3} = \frac{\pi}{12}$$

۲۷۲۳. با توجه به شکل:



$$AD^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \Rightarrow AD = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow S_{\text{قاعده هرم}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \times \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{2}$$

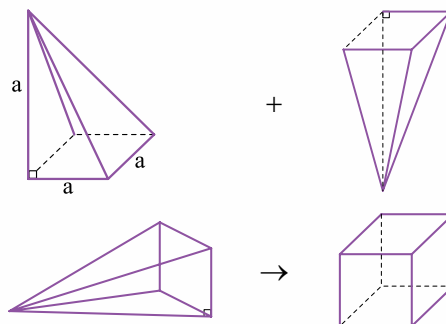
یعنی مساحت قاعده هرم، نصف مساحت قاعده مکعب است؛ پس داریم:

$$V_{\text{مکعب}} = \frac{1}{6} \times \text{ارتفاع} \times \text{قاعده مکعب} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times S_{\text{قاعده}} \times \text{ارتفاع} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times S_{\text{قاعده}} \times a$$

از آن جایی که حجم مکعب برابر با ۱ است، حجم هرم برابر با $\frac{1}{6}$ خواهد بود.

۲۷۲۴. برای این که با استفاده از سه هرم متساوی مربع القاعده یک

مکعب بسازیم، هرم‌ها باید به شکل زیر باشند:



واضح است که بلندترین یال هرم، همان قطر مکعب می‌باشد که اندازه‌اش برابر $\sqrt{3}a$ است.

۲۷۲۵. بزرگ‌ترین هرمی که می‌توان در داخل این استخر ساخت،

هرمی است با قاعده مستطیلی 20 در

12 و ارتفاع 4 . حجم این هرم برابر

است با:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{قاعده}} \times h = \frac{1}{3} \times 20 \times 12 \times 4 = 320 \text{ m}^3$$

